Funções e Propriedades da Transformada Z

Adrielle C. Santana

Da aula passada...

Vimos que o sinal discreto x*(t) ou x(nT), obtido do sinal contínuo x(t) é obtido como a soma de impulsos (unitários) deslocados ponderados no tempo, em que o peso do impulso $\delta(t - nT)$ é $x(nT)$.

Com base nisso vimos que a transformada Z de qualquer função genérica tal como a x(t) pode ser obtida pela transformada de Laplace do sinal discreto dado por: $\sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT)$

Propriedades de Transformada Z

LINEARIDADE

$$a x_1[n] + b x_2[n] \overset{Z}{\Leftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a x_1[n] + b x_2[n]) z^{-n} =$$

$$= a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\, z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]\, z^{-n}$$

Propriedades de Transformada Z

Deslocamento no tempo à direita (atraso)

Qual a transformada z da função $y[n]=x[n-n_0]$?

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n}$$

Fazendo $m=n-n_0$

Propriedades de Transformada Z

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)}$$

$$= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m}$$

Onde,

$$\boxed{Y(z) = z^{-n_0} X(z)}$$

Propriedades de Transformada Z

Deslocamento no tempo à esquerda

$$Z\{x(nT + kT)\} = Z\{x(n + k)\}$$

$$= z^k X(z) - z^k \sum_{n=0}^{k-1} x(n) z^{-n}$$

Propriedades de Transformada Z

Convolução de sequências

Seja

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k],$$

Aplicando a definição da transformada Z:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right\} z^{-n}$$

Propriedades de Transformada Z

Trocando a ordem do somatório:

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] z^{-n}$$

Fazendo m=n-k

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m] z^{-m} \right\} z^{-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \underbrace{X_2(z)}_{|z| \in R_{x_2}} z^{-k} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] z^{-k} \right) X_2(z)$$

Propriedades de Transformada Z

Onde resulta em:

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z)$$

Propriedades de Transformada Z

Teorema do valor final

Permite calcular o valor final de uma sequência cuja transformada é conhecida. Assim é possível conferir se o sistema é estável ao analisar se ele converge para algum valor. Logo, se a propriedade é verdadeira o sistema pode ser considerado estável.

Propriedades de Transformada Z

Teorema do valor final

Se Z[x(nT)]=X(z) e x(nT)=0 para n<0 e que todos os pólos de X(z) estão dentro do círculo uniátrio então:

$$x(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

Propriedades de Transformada Z

Teorema do valor inicial

Permite calcular o valor inicial de uma sequencia cuja transformada z é conhecida. Geralmente x(0) é conhecido então utiliza-se o teorema para verificar se o cálculo de X(z) foi correto.

Se Z[x(nT)]=X(z) e se $\lim_{z\to\infty} X(z)$ existe então o valor inicial x(0) de x(nT) é dado por:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$