Especificações de Sistemas de Controle

Adrielle C. Santana

Especificações

Em geral sistemas de controle devem atender a algumas especificações para que a planta seja controlada de acordo com o que se deseja. Algumas delas podem ser:

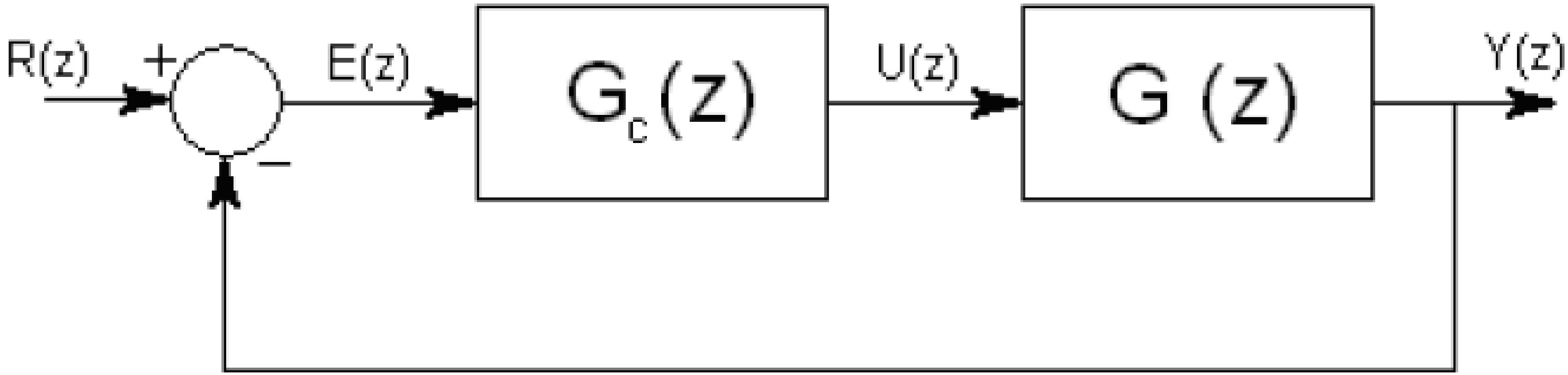
- Erro em regime permanente;
- Resposta dinâmica;
- Esforço requerido ao controle.

Especificações

Vamos estudar essas especificações para entender o que significam e como podem nos ajudar na obtenção de um controlador discreto.

Erro em Regime Permanente

Dado o sistema de controle abaixo, o erro em regime permanente é o erro entre a entrada R(z) e a saída Y(z) do sistema quando $kT \rightarrow +\infty$, representado aqui por e$(+\infty)$.



Erro em Regime Permanente

O erro neste sistema é dado por:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + G_c(z)G(z)}$$

Vimos no teorema do valor final que o limite de uma função discreta f(kT) quando kT tende a $+\infty$ é igual ao limite da sua transformada z, F(z), quando z tende a 1. Logo $e(+\infty)$ é obtido fazendo-se $\lim_{z \to 1} E(z)$. Isso é verdade se os polos de malha fechada do sistema considerado estiverem dentro do círculo unitário.

Erro em Regime Permanente

- **Erro em regime permanente para entrada tipo degrau (erro estático de posição)**

Vimos que a transf. Z do degrau unitário é $\frac{z}{z-1}$. Se o degrau não é unitário basta multiplicar o ganho A pela transformada. Desse modo a entrada fica:

$$R(z) = \frac{Az}{z-1}$$

Erro em Regime Permanente

A equação do erro fica então:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G_c(z)G(z)} \cdot \frac{Az}{z-1}$$

Aplicando o teorema do valor final

$$e(+\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1)E(z)$$

$$e(+\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1}{1 + G_c(z)G(z)} \cdot \frac{Az}{z-1}$$

Erro em Regime Permanente

$$e(+\infty) = \lim_{z \to 1} \frac{Az}{1 + G_c(z)G(z)}$$

Se $k_p = \lim_{z \to 1} G_c(z)G(z)$

$$\boxed{e(+\infty) = \frac{A}{1 + k_p}}$$

Para o erro ser nulo na resposta a uma entrada degrau $k_p = \infty$. Isso é possível se $G_c(z)G(z)$ possuir pelo menos um polo em z=1.

Erro em Regime Permanente

- **Erro em regime permanente para entrada tipo rampa (erro estático de velocidade)**

A transformada z da função rampa unitária é:

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Se não for unitária sua forma geral fica:

$$R(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2}$$

Erro em Regime Permanente

A equação do erro fica então:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G_c(z)G(z)} \cdot \frac{ATz}{(z-1)^2}$$

Aplicando o teorema do valor final

$$e(+\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{1 + G_c(z)G(z)} \cdot \frac{ATz}{(z-1)^2}$$

$$e(+\infty) = \lim_{z\to 1}\frac{ATz}{(z-1) + (z-1)G_c(z)G(z)}$$

Erro em Regime Permanente

Como $\lim_{z \to 1}(z-1) = 0$ e $\lim_{z \to 1} z = 1$ pode-se reescrever a última equação como:

$$e(+\infty) = \lim_{z \to 1} \frac{AT}{(z-1)G_c(z)G(z)}$$

Se

$$k_v = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)G_c(z)G(z)}{T}$$

Tem-se que:

$$\boxed{e(+\infty) = \frac{A}{k_v}}$$

Erro em Regime Permanente

Para o erro a uma entrada em velocidade ser nulo $k_v = +\infty$ o que requer que $G_c(z)G(z)$ possua um polo duplo em z=1.

Erro em Regime Permanente

Como queremos que $k_v \rightarrow +\infty$ podemos adicionar polos e zeros em $G_c(z)$ como um zero em 0,9 e um polo em 0,99 de modo que:

$$\frac{(1-0{,}9)}{(1-0{,}99)} = 10$$

Esforço Requerido do Controle

Especifica-se aqui a magnitude máxima da entrada r(kT) para se obter a resposta desejada e a mínima energia utilizada. Nesse último caso utilizam-se técnicas de controle ótimo.

Técnicas para estas especificações não serão vistas nesse curso.

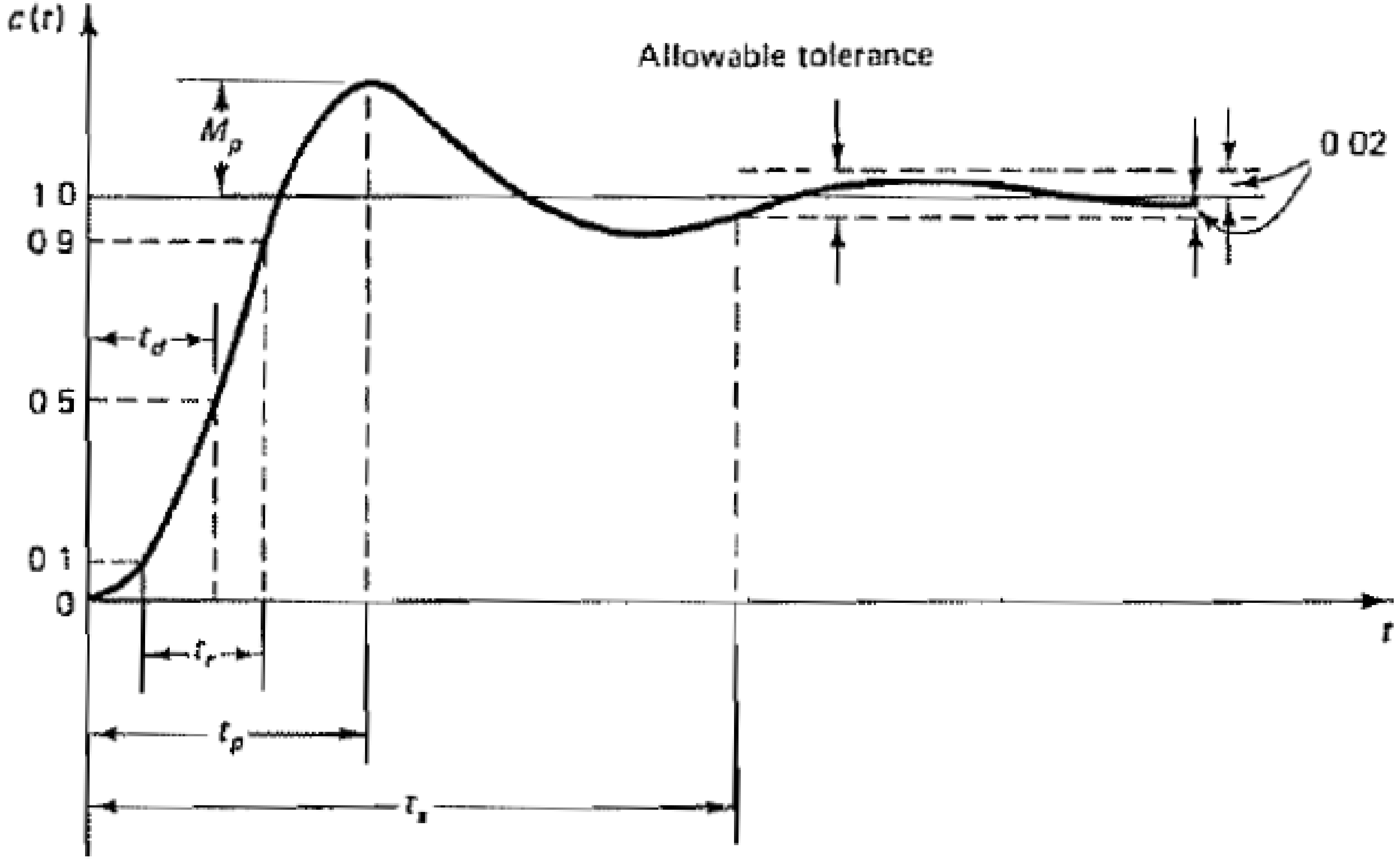
Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

São especificações de desempenho que garantem que o sistema manterá erros pequenos quando a entrada variar (regime transitório). Comumente são feitas no domínio de Laplace.

Tais especificações são feitas sobre sistemas submetidos a uma entrada degrau (fácil de gerar, possibilita obter informações do sistema em regime transitório e permanente) a fim de ajudar no projeto de controladores ou simplesmente analisar o sistema.

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

Definições



Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

Um sistema de malha fechada de segunda ordem pode ser representado como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

$$\zeta \rightarrow coeficiente\ de\ amortecimento$$
$$\omega_n \rightarrow frequência\ natural\ de\ oscilação$$

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

$t_d \rightarrow$ tempo de atraso: tempo para a resposta do sistema alcançar metade do valor final.

$t_p \rightarrow$ tempo de pico: tempo que leva para a resposta alcançar o primeiro pico do sobresinal (overshoot).

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

$t_r \rightarrow$ tempo de subida: tempo requerido para resposta ir de 10 a 90% do valor final.

$$t_r \cong \frac{2,4}{\omega_n}$$

$$t_r = \frac{\pi - arcsen\sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

$t_s \rightarrow$ tempo de acomodação: tempo necessário para a resposta alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final, tipicamente 1% a 2%.

2%

$$t_s \cong \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

1%

$$t_s \cong \frac{4{,}6}{\zeta \omega_n}$$

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

MP $\longrightarrow$ valor de pico máximo da resposta em porcentagem (overshoot)

$$MP = \frac{y(T_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

$$MP = \left[e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \right] \times 100\%$$

Onde, $0 < \zeta < 1$

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

As especificações vistas foram dadas em função de s. Para passar para z basta usar a relação $z = e^{sT}$.

Os polos do sistema de segunda ordem são dados por:

$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ então,

$z = e^{\left(-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)T} = e^{-\zeta\omega_n T} . e^{\pm j\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}}$

Módulo de z: $|z| = e^{-\zeta\omega_n T}$

Ângulo de z: $\lfloor z = \pm\, \omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}$

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

Se,

$$\zeta = constante \Rightarrow MP \text{ é } constante$$

$$\omega_n = constante \Rightarrow t_r \text{ é } constante$$

$$\zeta\omega_n = constante \Rightarrow t_s \text{ é } constante$$

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

Para $\zeta\omega_n$ constante

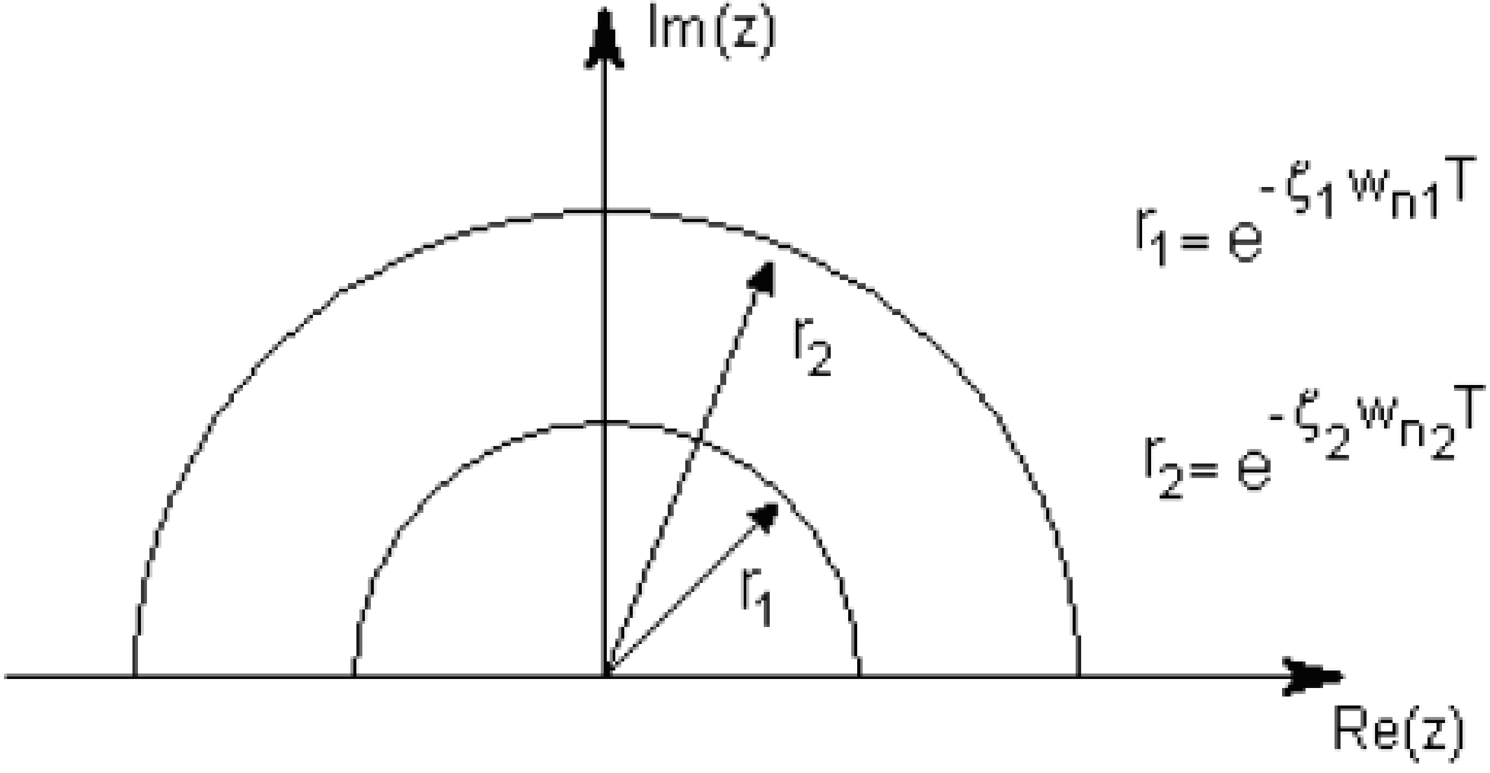
O módulo e ângulo dos polos de z serão:

$$|z| = e^{-\zeta\omega_n T} = \text{constante} = \text{raio}$$

$$\angle z = \pm\,\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2} = variável$$

No plano z um determinado t_s será um círculo de raio fixo centrado na origem.

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório



Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

Para ζ constante ($0< \zeta<1$) - MP

$$|z| = e^{-\zeta w_n T} \qquad \angle z = \pm w_n T\sqrt{1-\zeta^2}$$

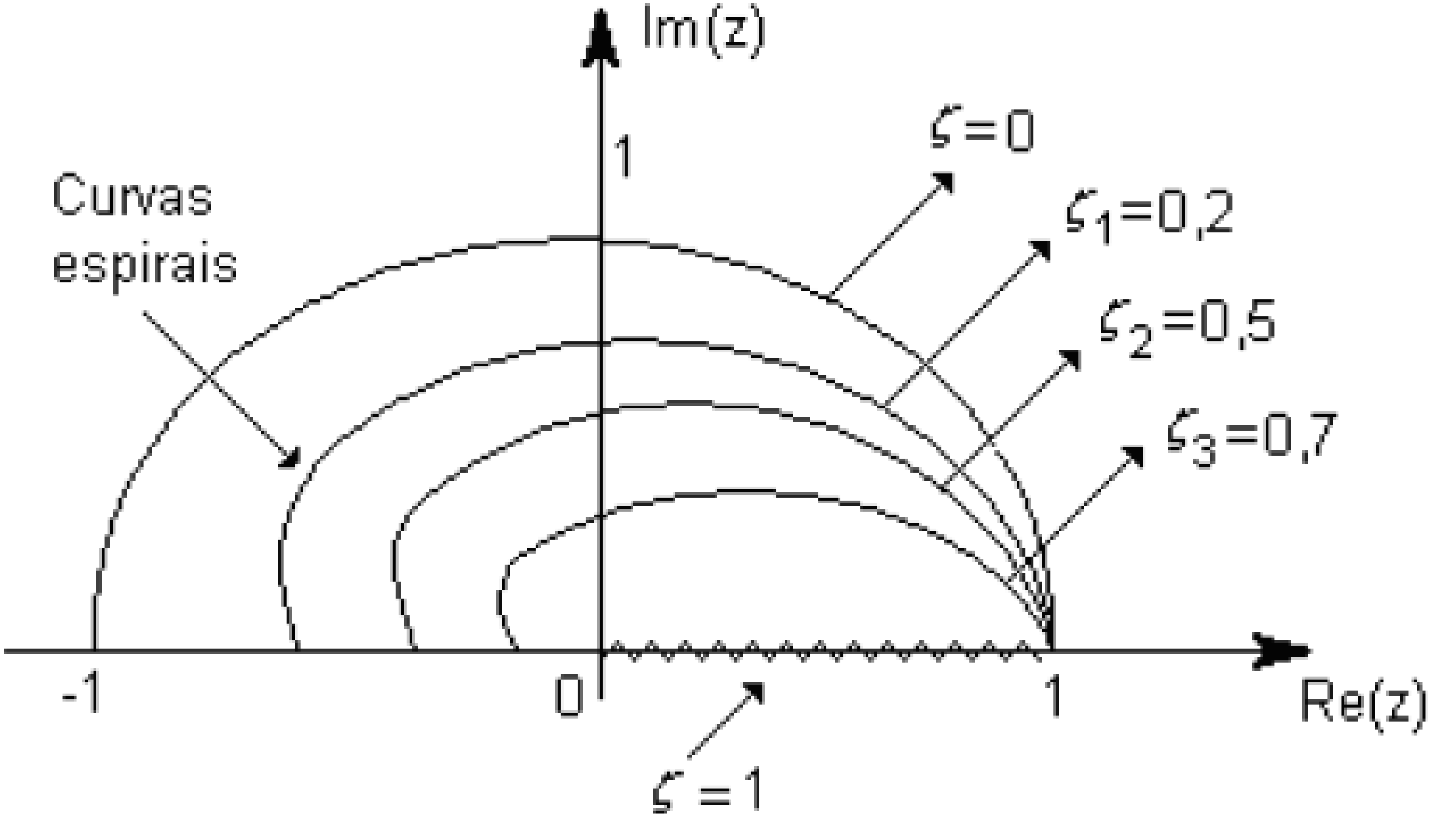
Se $\zeta=1$ $\quad \angle z = 0$ e $|z| \longrightarrow 0 < |z| < 1$ eixo real

Se $\zeta=0$ $\quad \angle z =$ variável $|z| = 1$ círculo unitário

Se $\quad 0< \zeta<1$ e

$$\begin{Bmatrix} \omega_n = 0 \ \rightarrow \ |z| = 1 \ \ e \ \angle z = 0 \\ \omega_n = crescente \ \rightarrow \ |z| decres. \ \ e \ \angle z \ cresc. \end{Bmatrix}$$

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório



Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

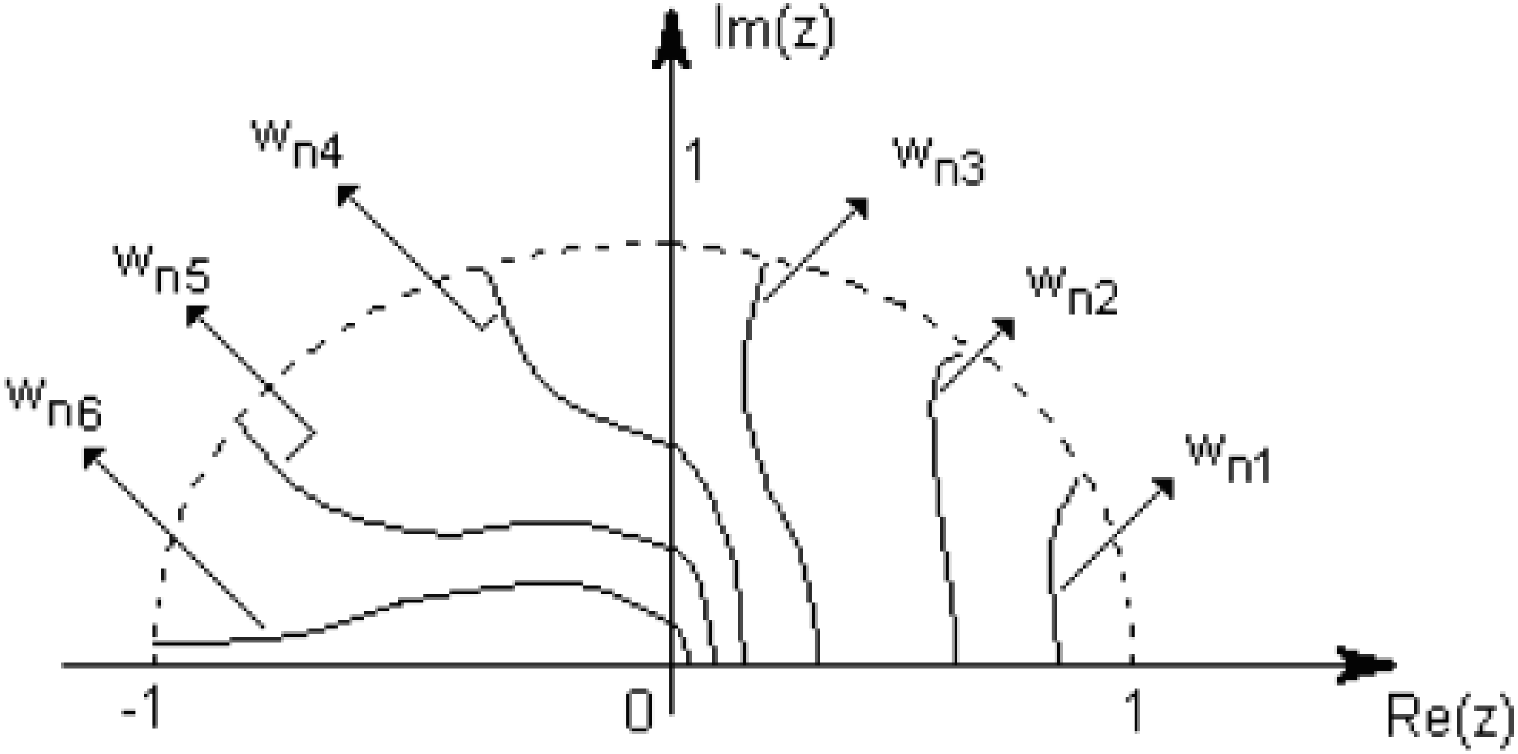
Para $\boldsymbol{\omega_n}$ $\boldsymbol{constante - t_r}$

$$|z| = e^{-\zeta w_n T} \qquad \angle z = \pm w_n T \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\zeta = 0 \quad \rightarrow \quad |z| = 1 \quad \text{e} \quad \angle z = w_n T \quad \rightarrow \quad \text{Círculo unitário}$$

$$\zeta = 1 \quad \rightarrow \quad |z| = e^{-w_n T} \quad \text{e} \quad \angle z = 0^\circ \quad \rightarrow \quad \text{Semi-eixo real } 0 \le z \le 1$$

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório



Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

Exemplo: Identifique no plano z, a região que atende ao conjunto de especificações a seguir:

$$MP\% \leq 16\% \text{ , } t_r \leq 6s \text{ e } t_s \leq 20s,$$

Sabendo que o período de amostragem do sistema discreto é T=1s.

Sabe-se

$$MP\% = \left[e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right).\pi} \right].100\% \quad \text{e} \quad MP\% \leq 16\%$$

Logo, $\zeta \geq 0,504$

Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

- $t_r \simeq \dfrac{2,4}{w_n}$ e $t_r \leq 6s$

  Logo, $\dfrac{2,4}{w_n} \leq 6 \rightarrow w_n \geq 0,4$

- $t_s \simeq \dfrac{4,6}{\zeta w_n}$ e $t_s \leq 20s$

  Logo, $\zeta w_n \geq 0,23$, mas $r = e^{-\zeta w_n T}$

  Então $r \leq e^{-0,23.1} \rightarrow r \leq 0,8$

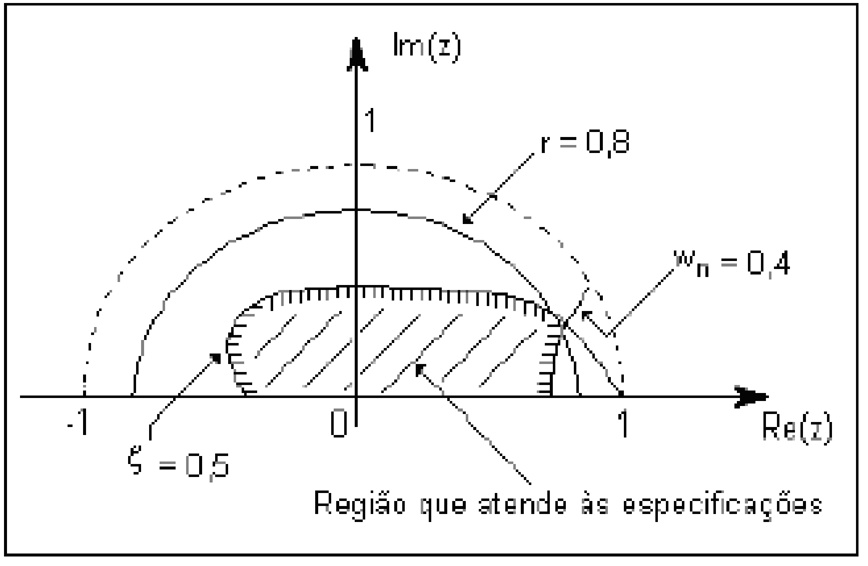
Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

A região que atende estas especificações em conjunto é formada pela intersecção das três regiões acima, que é:

MATLAB

zgrid(0.504,0.4)

O controlador $G_c(z)$ deverá fazer com que os polos do sistema realimentado estejam dentro desta região para que as especificações sejam atendidas.



Resposta Dinâmica ou Precisão em Regime Transitório

Uma regra para a escolha de T é:

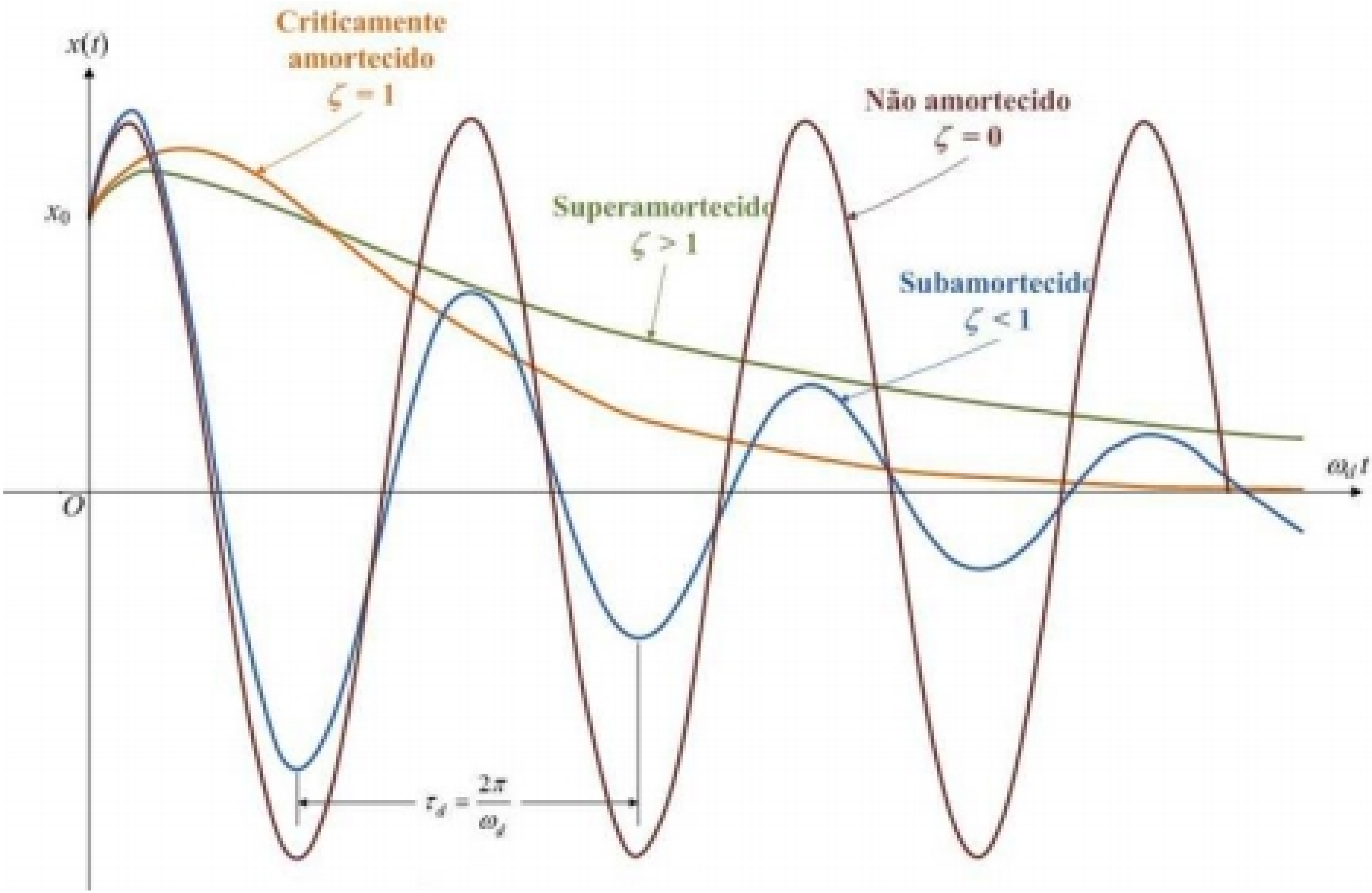
- Sistema subamortecido: amostrar de 8 ou mais vezes durante um ciclo de oscilação (ω_d).
- Sistema superamortecido: amostrar de 8 ou mais vezes durante o tempo de subida.

Utilizar a relação $n = \frac{\omega_s}{\omega_d}$ onde

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

Resposta Dinâmica: Coeficiente de Amortecimento



Resposta Dinâmica: Frequência natural