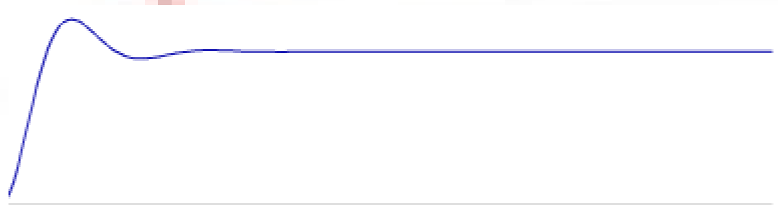
Análise do Lugar Geométrico das Raízes

Adrielle de Carvalho Santana

Introdução

- De acordo com a análise da resposta transitória de sistemas de ordem n feita nas aulas anteriores, constatamos que tal resposta é afetada diretamente pela localização dos polos de malha fechada do sistema, no plano complexo.

- Exemplo:

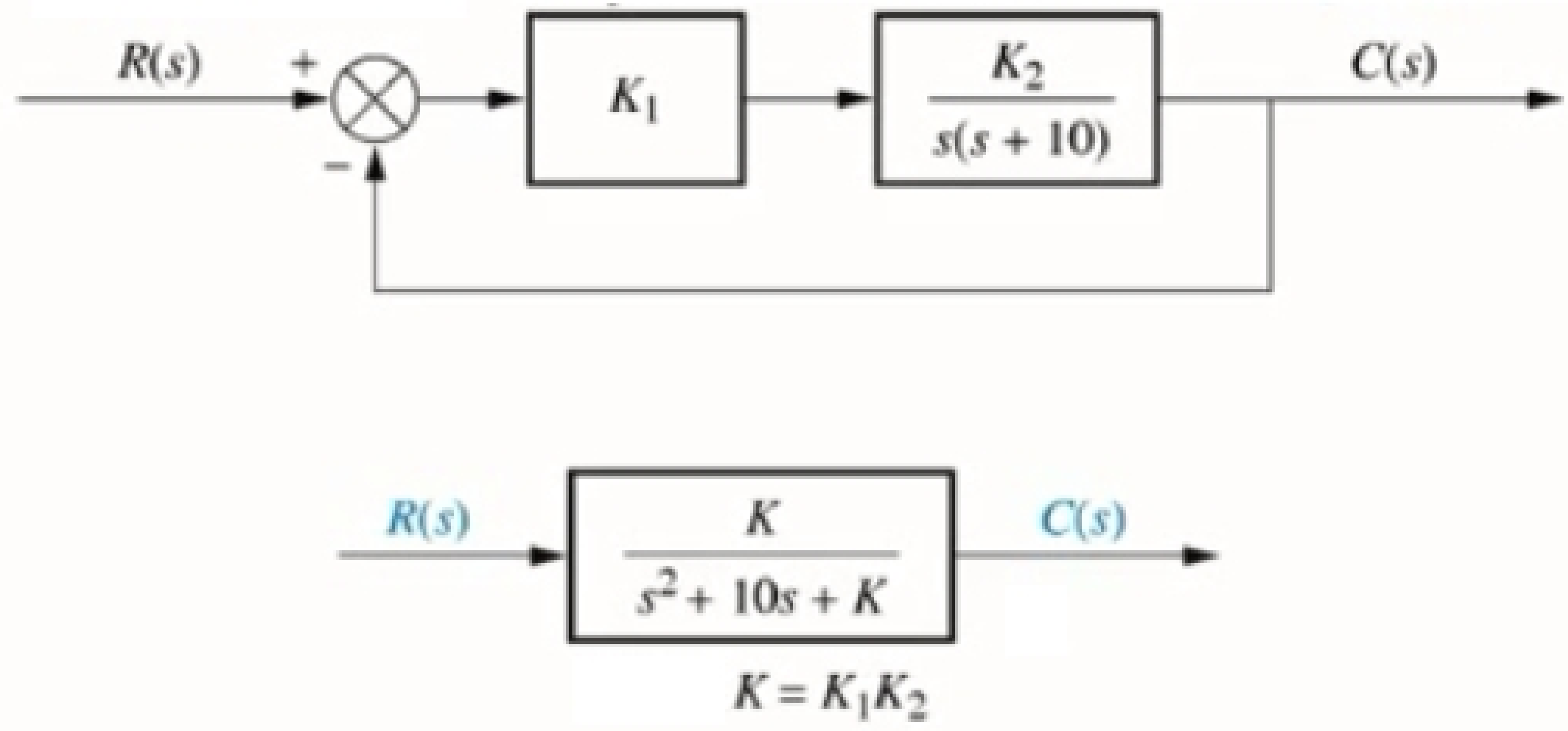


Introdução

- O gráfico do **Lugar Geométrico das Raízes** (LGR)consiste no desenho de todos os valores que os polos de malha fechada de uma função de transferência, assumirão num plano de coordenadas complexas quando variarmos o ganho de malha **K** ou adicionarmos polos e/ou zeros de malha aberta.

Introdução

Considere o sistema abaixo:



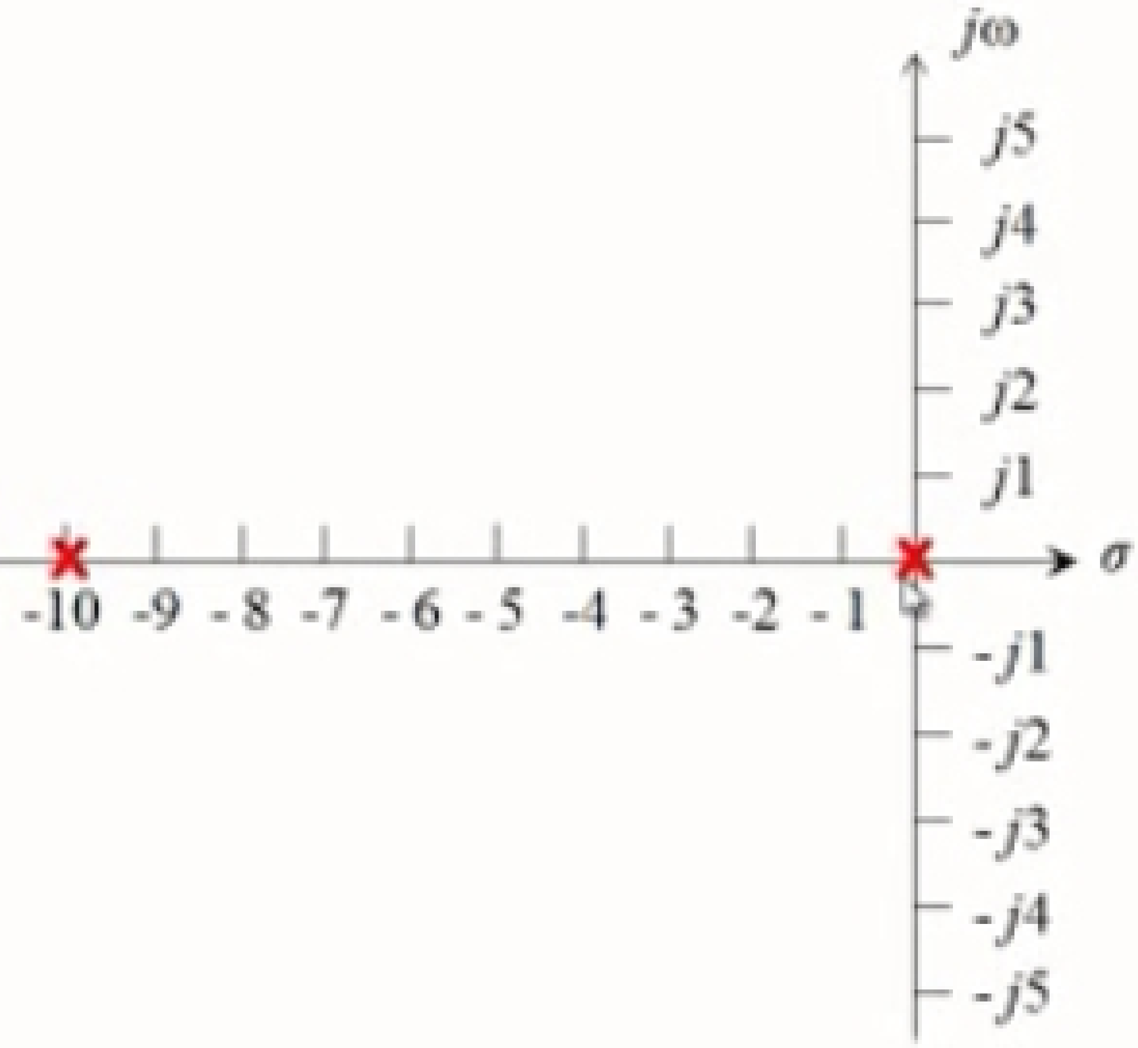
Fonte(Nise, 2005)

Introdução

- Da função de transferência anterior obtemos a equação característica cujas raízes são os polos de malha fechada (dependentes de K).
- $s^2+10s+K$
- Variando K de 0 a infinito temos o seguinte comportamento dos polos de malha fechada no plano complexo:

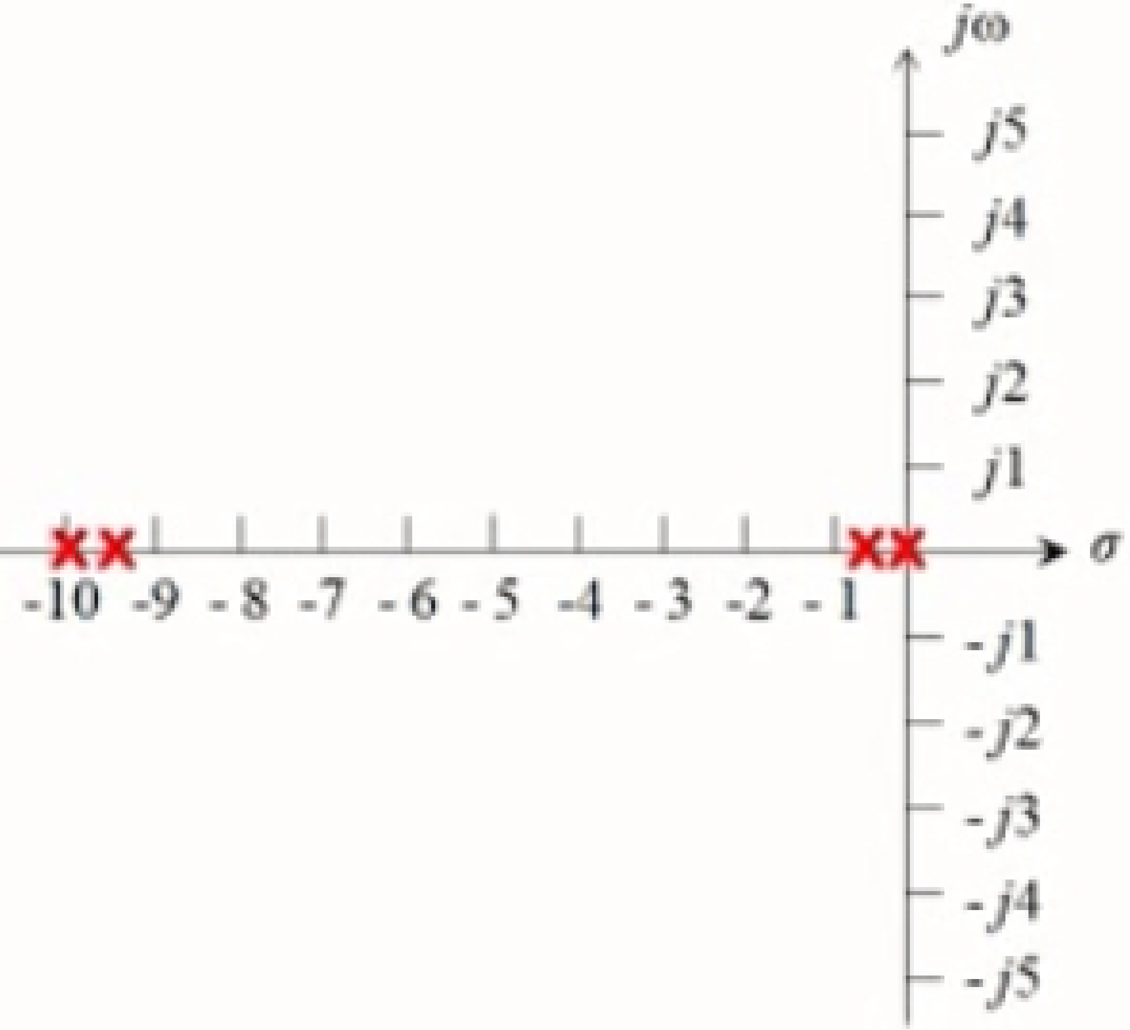
Introdução

Para K=0



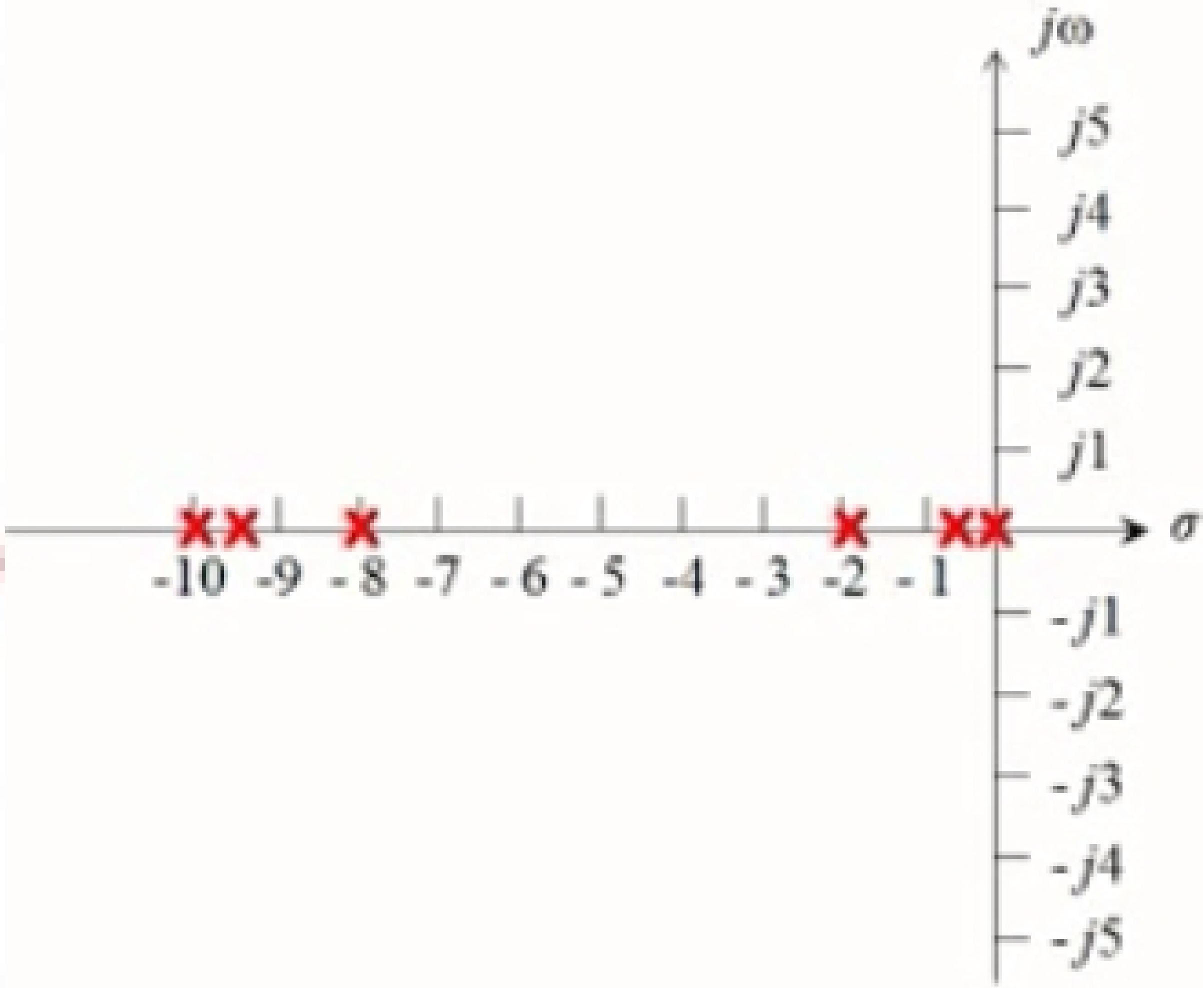
Introdução

Para K=5



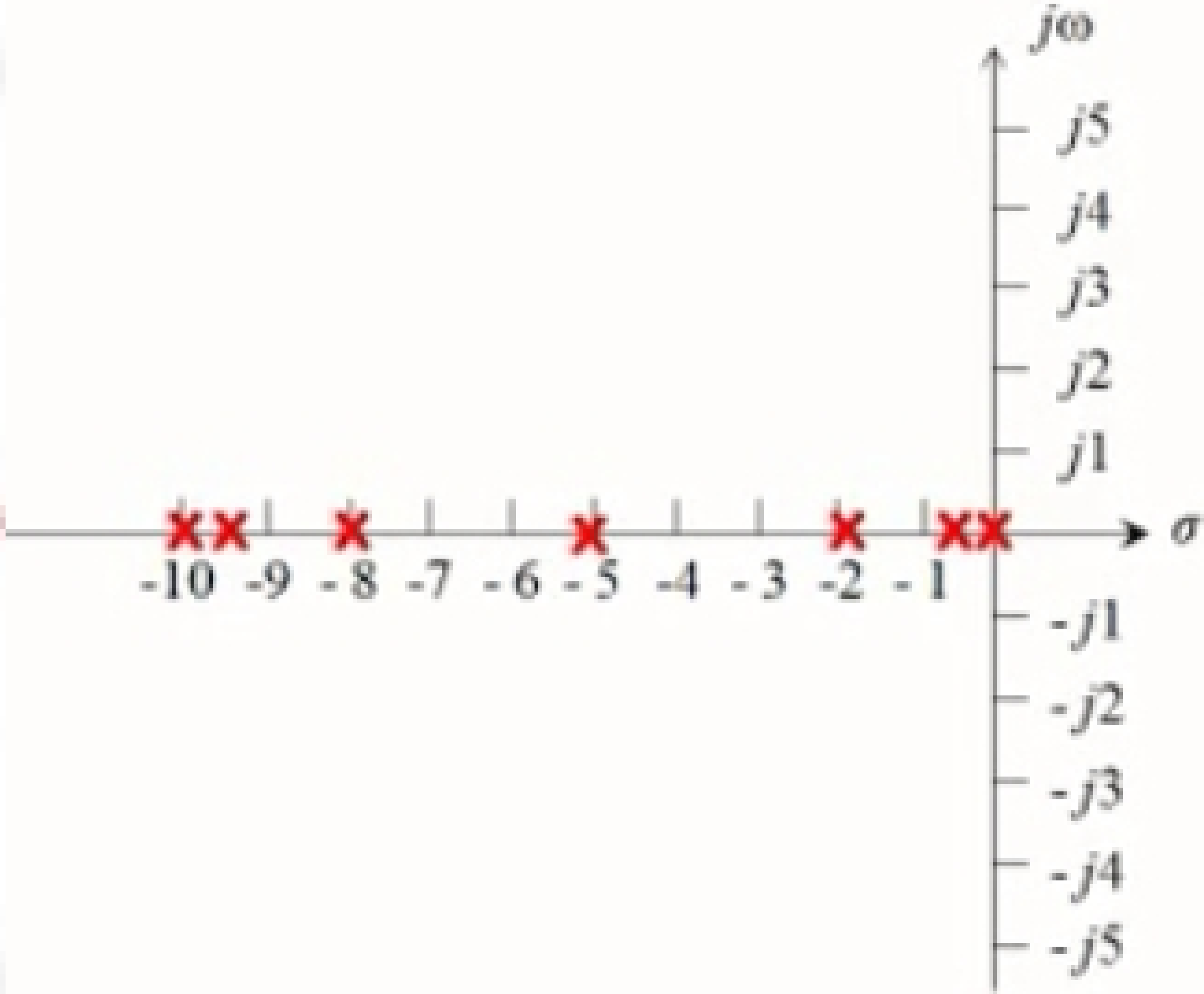
Introdução

Para K=15

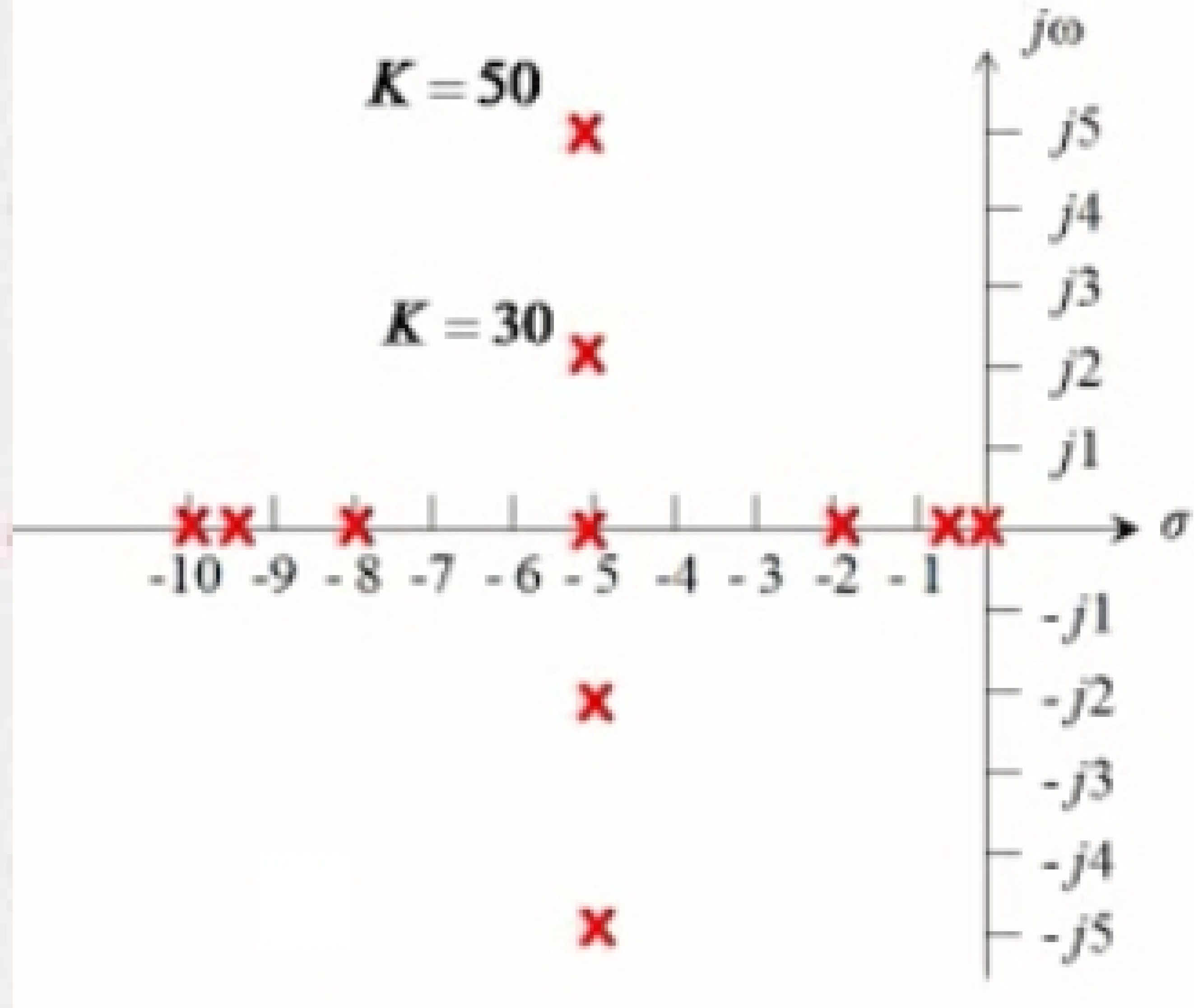


Introdução

Para
K=25
s’ = s’’ =
-5

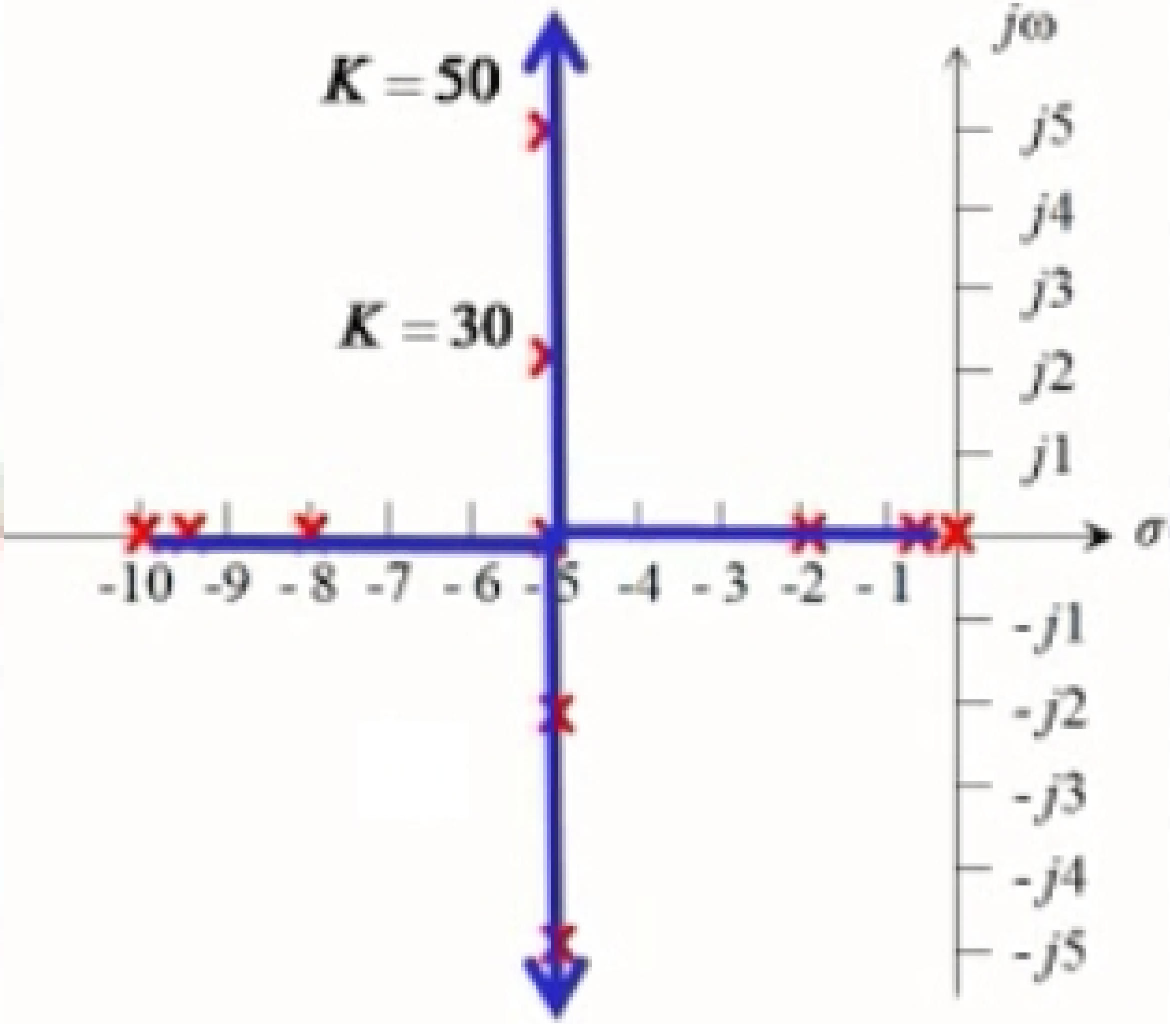


Introdução



Introdução

Trajetória = LGR



Introdução

- É essencial que o projetista saiba como os polos de malha fechada (MF) se movem no plano complexo a medida que o ganho K varia pois, de tal localização dependerá a resposta transitória do sistema.
- Dependendo da resposta desejada para o projeto, o projetista deverá buscar o correto posicionamento dos polos com base no gráfico do lugar das raízes e no uso de compensadores.

Introdução

- O método para obtenção do LGR:
- Resolução da equação característica (anterior). Problemas:
  - Resolução para equações de ordem superior a 2.
  - Análise estática. Cálculo a cada novo K.
- Método que indica todas as posições dos polos de MF do sistema analisado quando o ganho de malha (controlador proporcional) deste é variado.

Definições

- Antes, convém definir o que é a **condição de ângulo** e a **condição de módulo**, para um melhor entendimento de um dos passos a ser descrito.
- Seja a FT de malha fechada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- Da sua equação característica temos que:

$$G(s)H(s) = -1$$

Definições

- Polinômios G(s)H(s) no domínio de Laplace são grandezas complexas que possuem uma componente angular e um módulo de modo que:

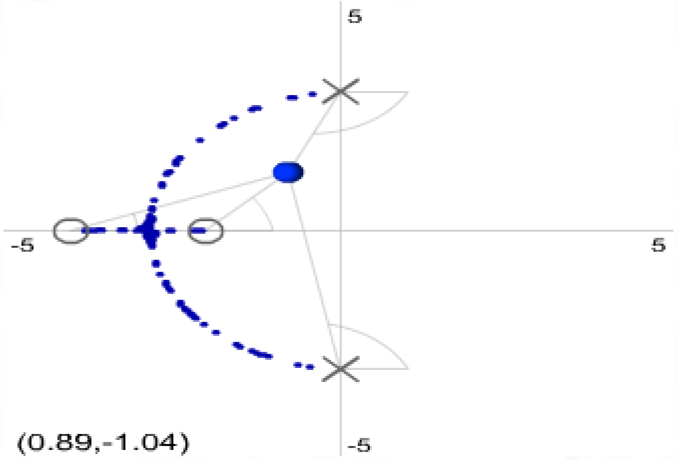
$$\angle KG(s)H(s) = \pm 180^\circ(2m+1) \qquad (m = 0,1,2,\ldots)$$

$$|KG(s)H(s)| = 1$$

- Condição de ângulo e módulo.

Definições

- Naturalmente, os polos de MF satisfazem tanto a condição angular quanto a de módulo.
- O LGR satisfaz somente a condição angular sendo essa uma forma de localizar tais pontos no gráfico do lugar das raízes.

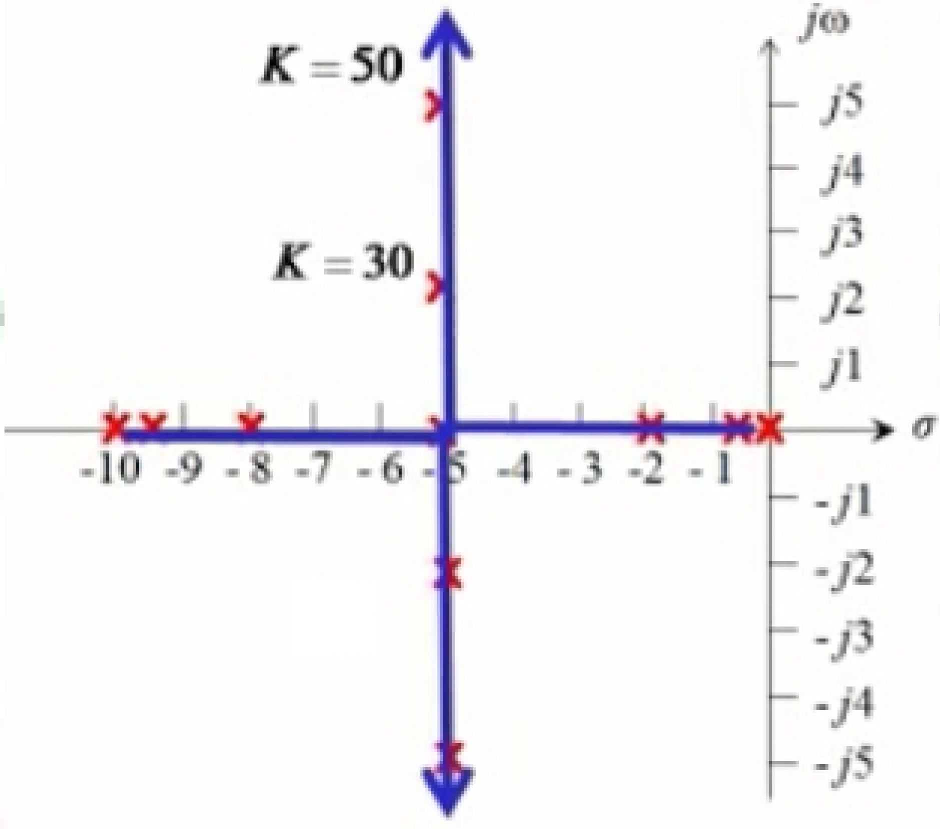


Método do Lugar Geométrico das Raízes

Seguindo os 6 passos descritos a seguir a obtenção do gráfico do LGR fica bem simples.

- **1º Passo**

Determinar o número de ramos. É o caminho percorrido pelo polo quando se varia K.

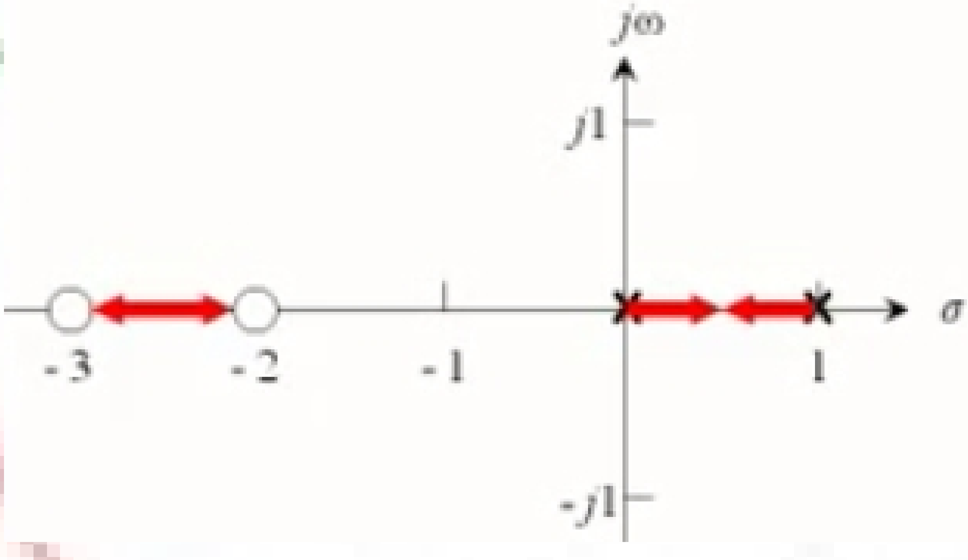


Método do Lugar Geométrico das Raízes

- **2º Passo**

Determinar o LGR sobre o eixo real por segmentos.

Regra básica → No eixo real, o lugar geométrico das raízes existe à esquerda de um número ímpar de polos e/ou zeros finitos (MA) sobre o eixo real.



Método do Lugar Geométrico das Raízes

- **3º Passo**

Determinar onde estão os polos ou zeros no infinito.

O lugar geométrico das raízes se inicia nos polos finitos e infinitos de G(s)H(s) e termina nos zeros finitos e infinitos de G(s)H(s).

Polos MA = Zeros MA

Método do Lugar Geométrico das Raízes

$$G(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{(s+5)(s+6)}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Método do Lugar Geométrico das Raízes

Determinar as assíntotas que guiarão a direção dos polos ou zeros no infinito. O ponto de interseção da assíntota sobre o eixo real e seu ângulo são obtidos por:

$$\theta_a = \frac{(2k+1)180^o}{\#\ \ p\acute{o}los\ \ finitos - \#\ \ zeros\ \ finitos}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum p\acute{o}los\ \ finitos - \sum zeros\ \ finitos}{\#\ \ p\acute{o}los\ \ finitos - \#\ \ zeros\ \ finitos}$$

onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Método do Lugar Geométrico das Raízes

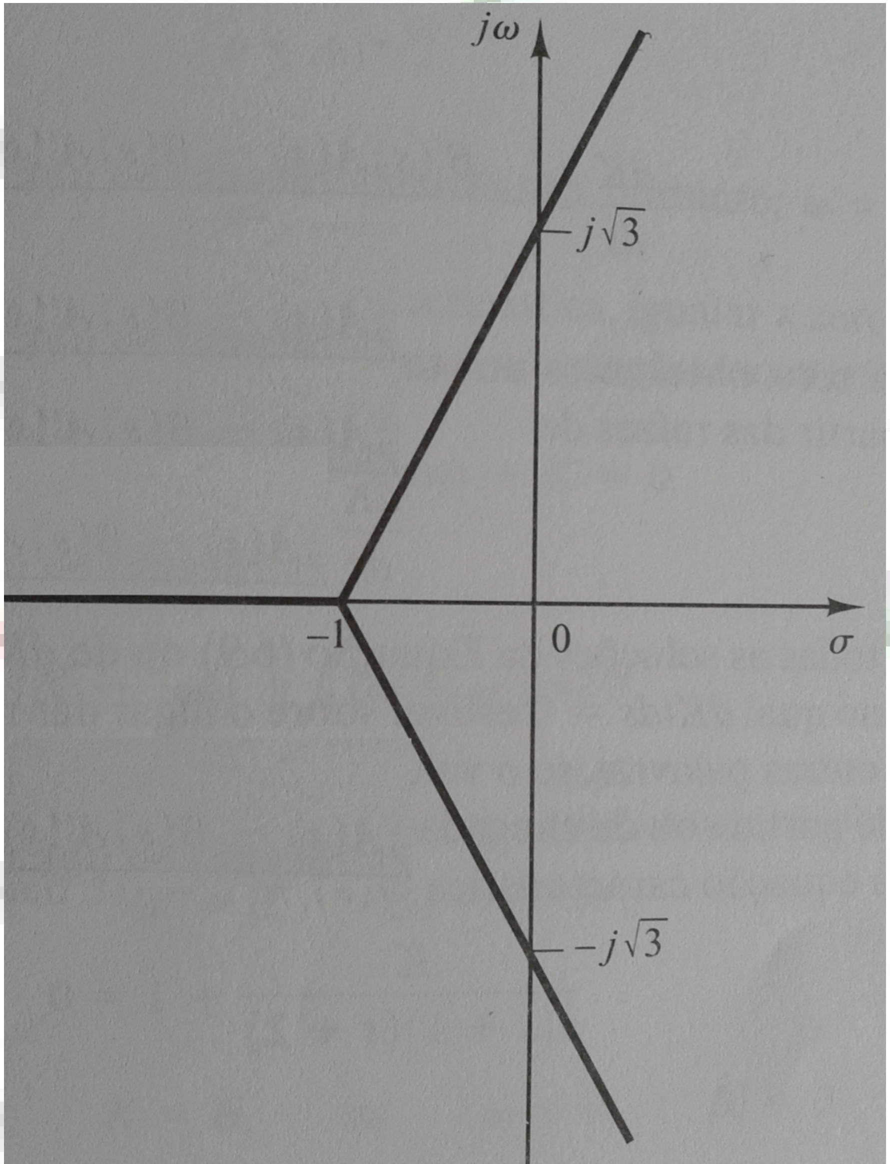
Encontrando as assíntotas para a função abaixo:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

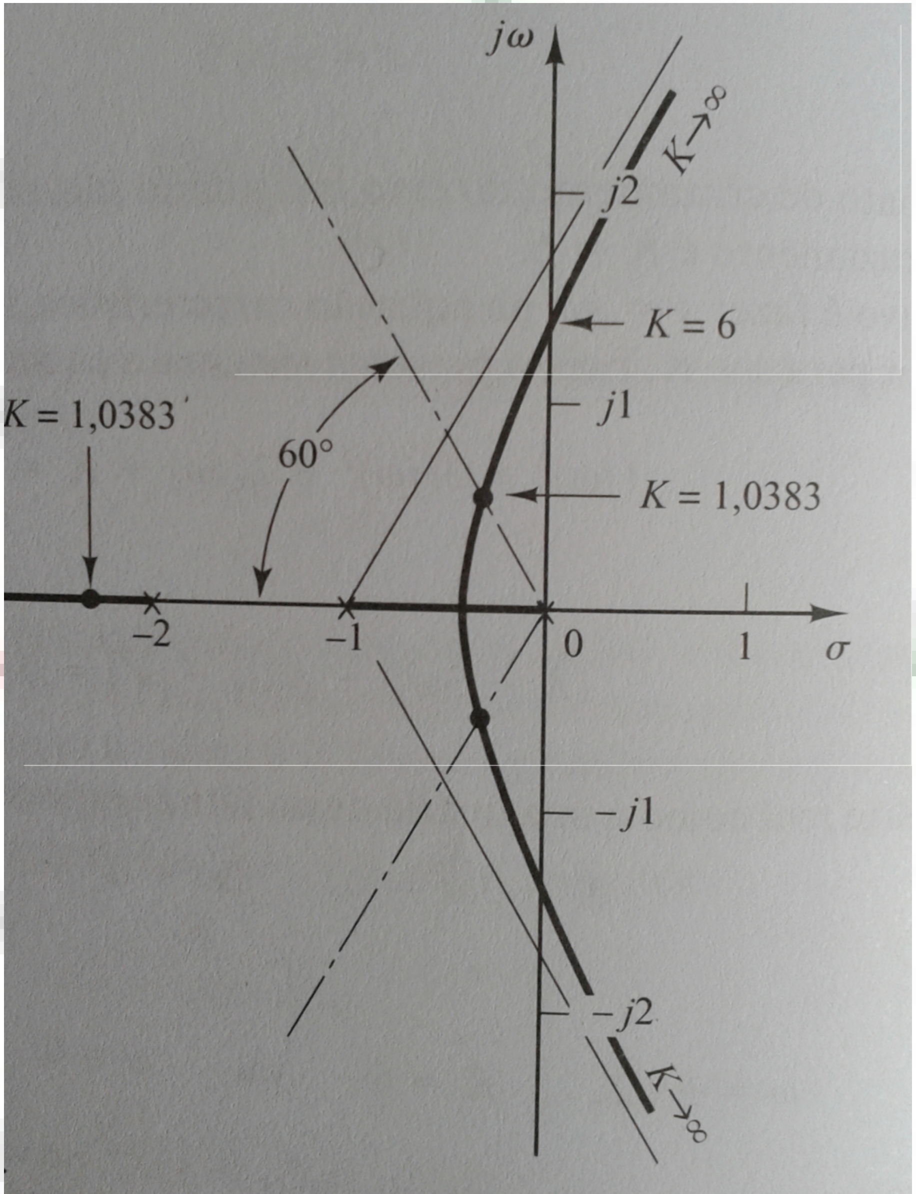
$$\theta_a = \frac{\pm(2k+1)180}{3} \qquad k = 0, \text{k=1}$$

$$\sigma_a = \frac{0-1-2-0}{3-0} = -1$$

Método do Lugar Geométrico das Raízes



Método do Lugar Geométrico das Raízes



Método do Lugar Geométrico das Raízes

- **4º Passo**

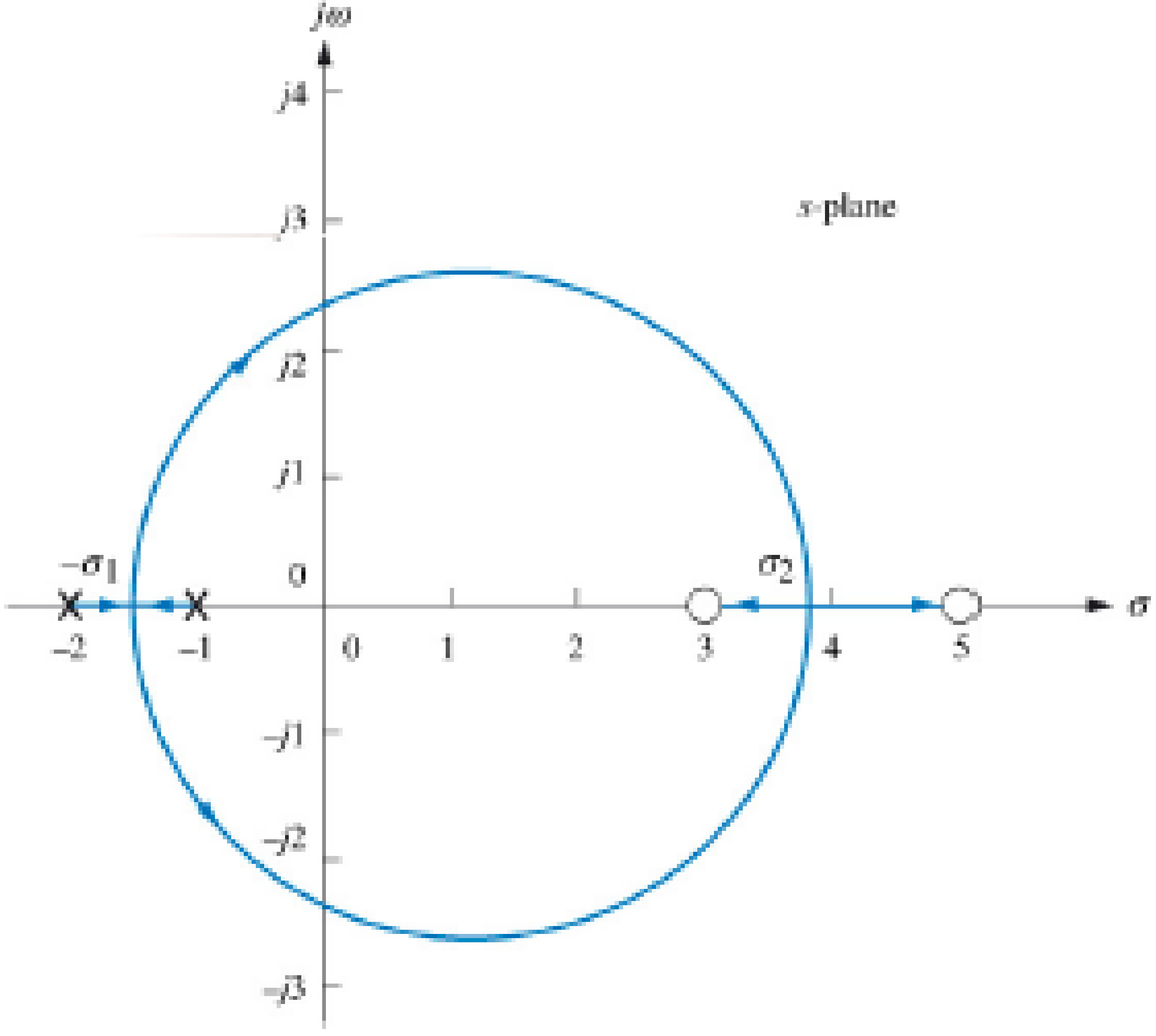
Determinar os ângulos e os pontos de chegada e partida **no eixo real**.

Ponto de partida: LGR sai do eixo real e segue para plano complexo.

Ponto de chegada: LGR deixa o plano complexo e entra no eixo real.

DICA: O LGR tem início nos polos MA e fim nos zeros MA. Simplificação para polos e zeros adjacentes.

Método do Lugar Geométrico das Raízes



Método do Lugar Geométrico das Raízes

- Ângulo do ponto de partida ou chegada:

$$\theta = \frac{180}{n} \qquad n = n^{\underline{o}}\ polos$$

- Pontos de partida e chegada:

$$\sum_{1}^{m} \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\sigma - p_i}$$

Onde **m**= $n^{\underline{o}}$ de zeros e **n**= $n^{\underline{o}}$ de polos

Método do Lugar Geométrico das Raízes

- **5º Passo**

Determinar os ângulos de partida e chegada **nos polos e zeros complexos** se existirem.

Para se determinar esse ângulo utilizamos um ponto de teste próximo a um polo (partida) e a partir dele calculamos os ângulos de cada polo e cada zero até ele de modo que o ângulo formado entre esse ponto e o polo próximo seja determinado pela regra:

$$\sum \varphi_i - \sum \theta_i = \pm 180\ (2k+1) \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

Método do Lugar Geométrico das Raízes

- **6º Passo**

Determinar os pontos de interseção do LGR **com o eixo dos imaginários** se existirem.

- Para se determinar o ponto de interseção no eixo imaginário pode-se utilizar o critério de Routh-Hurwitz da seguinte forma:

a) escreve-se a matriz de Routh (MF).

b) Encontra-se o valor do Ganho K, fazendo a linha s1 igual a zero.

c) Os pontos de cruzamento com o eixo imaginário são então

determinados com a resolução da equação auxiliar obtida a partir da linha s2 .

Método do Lugar Geométrico das Raízes

Resumindo...

Os 6 passos para desenharmos perfeitamente o gráfico do lugar das raízes são:

Para se obter apenas um rascunho...

1º Passo: Determinar o número de ramos

2º Passo: Determinar os segmentos sobre o eixo real

3º Passo: Determinar onde estão os pólos ou zeros no infinito

Para detalhar o Lugar Geométrico das Raízes

4º Passo: Determinar os ângulos e os pontos de chegada e partida no eixo real

5º Passo: Determinar os ângulos de partida e chegada nos pólos e zeros complexos

6º Passo: Determinar os pontos de interseção com o eixo dos imaginários

LGR no MATLAB

O software MATLAB fornece uma função pronta para a obtenção do gráfico do lugar das raízes para um dado sistema com base no numerador e denominador da função de transferência de malha aberta [G(s)H(s)] não importando o valor do ganho K nessa função.

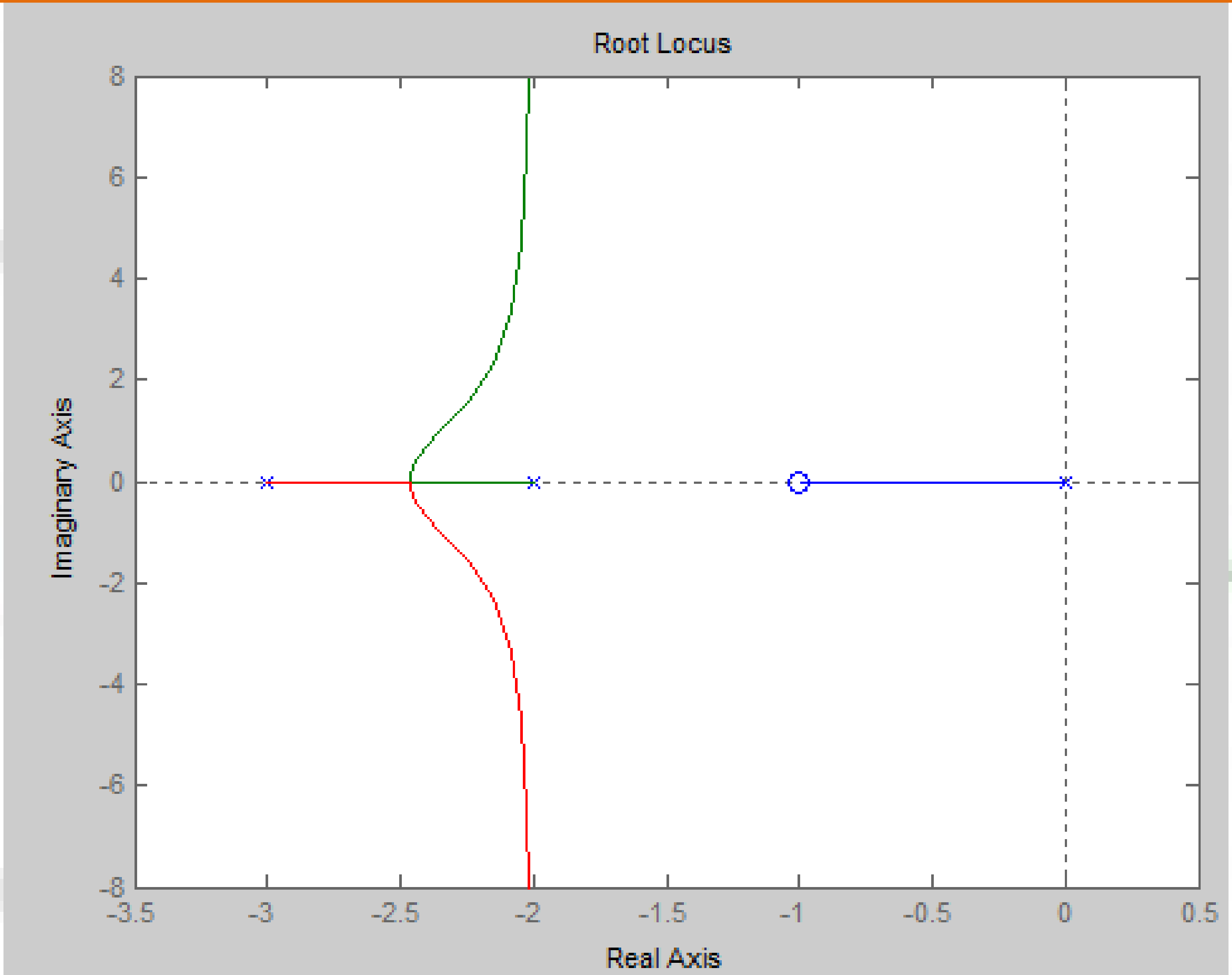
LGR no MATLAB

Ex.: Seja G(s) H(s) = $\frac{(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = \frac{s+1}{s^3+5s^2+6s}$

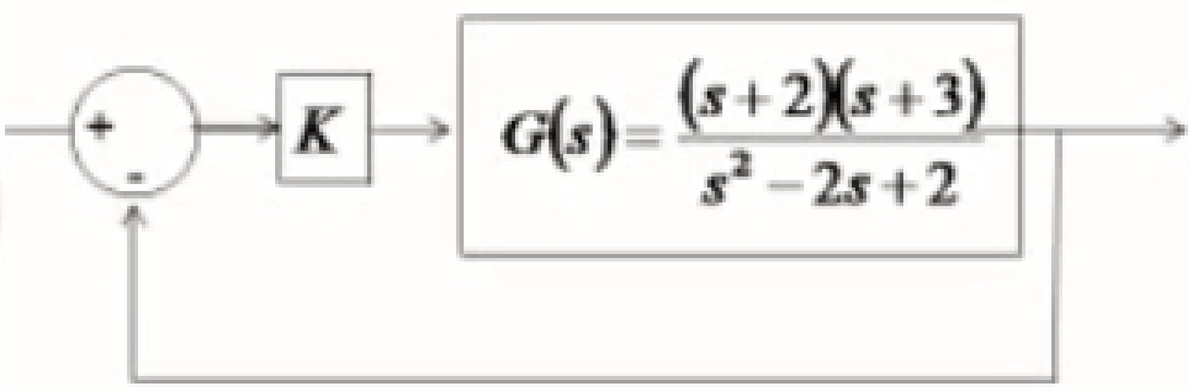
Escrevendo o seguinte código no MATLAB, obtém-se o gráfico do lugar das raízes para o sistema:

```
num=[0 0 1 1];
den=[1 5 6 0];
rlocus(num, den)
```

LGR no MATLAB



Exemplo



Exemplo

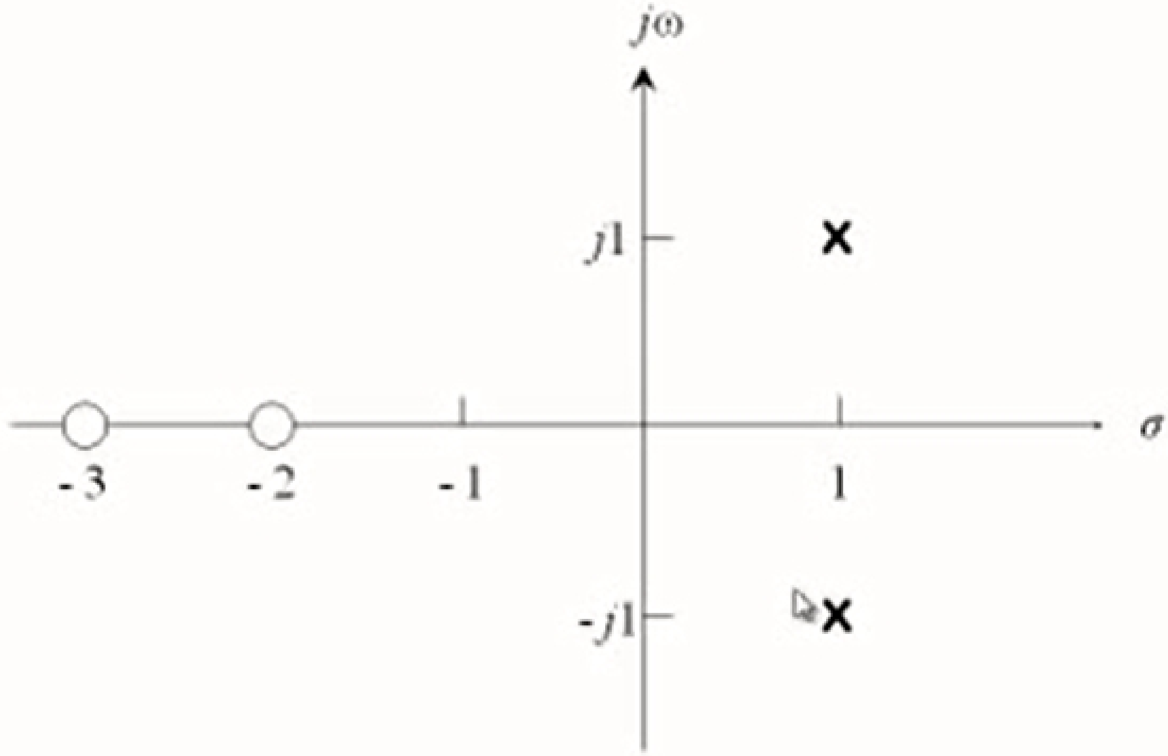
Identificam-se dois polos e dois zeros sendo:

P1=1-j

P2=1+j

Z1=-2

Z2=-3



Exemplo

Para se obter apenas um rascunho...

1º Passo: Determinar o número de ramos

2º Passo: Determinar os segmentos sobre o eixo real

3º Passo: Determinar onde estão os pólos ou zeros no infinito

Para detalhar o Lugar Geométrico das Raízes

4º Passo: Determinar os ângulos e os pontos de chegada e partida no eixo real

5º Passo: Determinar os ângulos de partida e chegada nos pólos e zeros complexos

6º Passo: Determinar os pontos de interseção com o eixo dos imaginários

Exemplo

- **Primeiro Passo: identificar ramos**

São dois ramos pois, são dois polos de MA.

Exemplo

Para se obter apenas um rascunho...

1º Passo: Determinar o número de ramos

2º Passo: Determinar os segmentos sobre o eixo real

3º Passo: Determinar onde estão os pólos ou zeros no infinito

Para detalhar o Lugar Geométrico das Raízes

4º Passo: Determinar os ângulos e os pontos de chegada e partida no eixo real

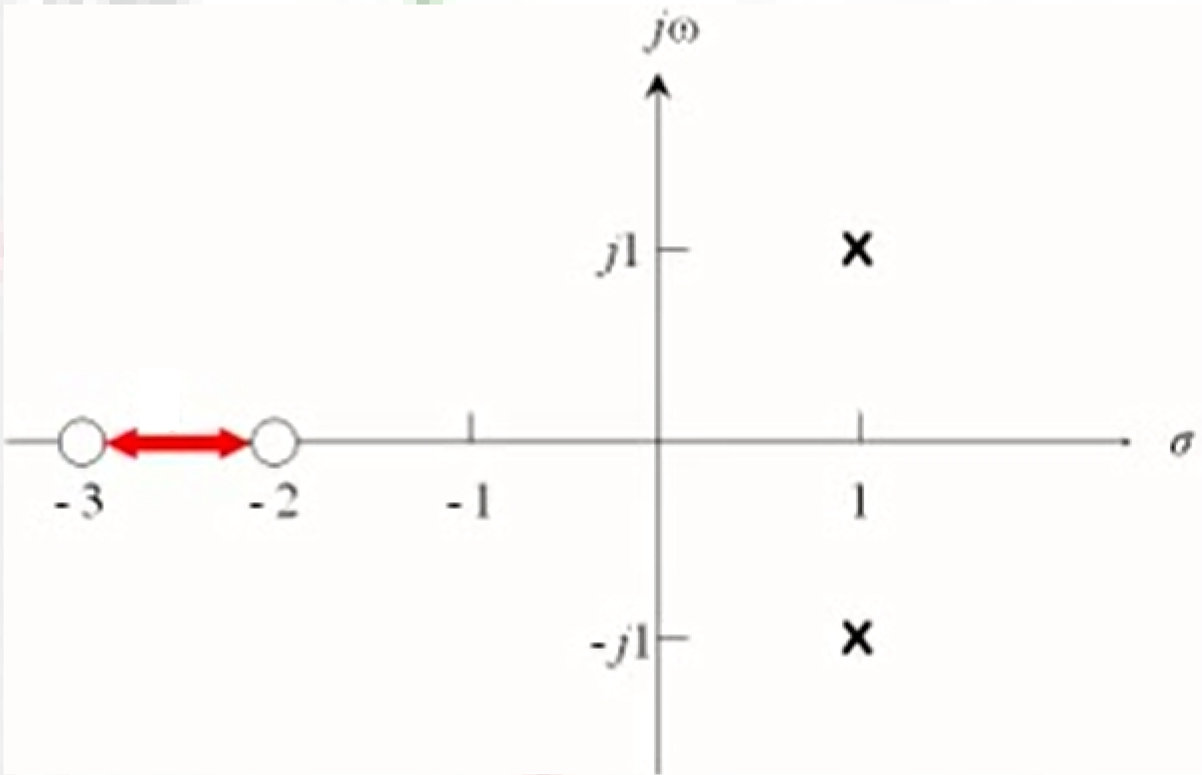
5º Passo: Determinar os ângulos de partida e chegada nos pólos e zeros complexos

6º Passo: Determinar os pontos de interseção com o eixo dos imaginários

Exemplo

- **Segundo Passo: determinar os segmentos sobre o eixo real.**

Da divisão em segmentos tem-se:



Exemplo

Para se obter apenas um rascunho...

1º Passo: Determinar o número de ramos

2º Passo: Determinar os segmentos sobre o eixo real

3º Passo: Determinar onde estão os pólos ou zeros no infinito

Para detalhar o Lugar Geométrico das Raízes

4º Passo: Determinar os ângulos e os pontos de chegada e partida no eixo real

5º Passo: Determinar os ângulos de partida e chegada nos pólos e zeros complexos

6º Passo: Determinar os pontos de interseção com o eixo dos imaginários

Exemplo

- **Terceiro Passo: determinar polos ou zeros no infinito.**

Neste exemplo, não há polos nem zeros no infinito.

Exemplo

Para se obter apenas um rascunho...

1º Passo: Determinar o número de ramos

2º Passo: Determinar os segmentos sobre o eixo real

3º Passo: Determinar onde estão os pólos ou zeros no infinito

Para detalhar o Lugar Geométrico das Raízes

4º Passo: Determinar os ângulos e os pontos de chegada e partida no eixo real

5º Passo: Determinar os ângulos de partida e chegada nos pólos e zeros complexos

6º Passo: Determinar os pontos de interseção com o eixo dos imaginários

Exemplo

- **Quarto Passo: determinar os ângulos e os pontos de partida e chegada ao eixo real.**

$$\sum_{1}^{m}\frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_{1}^{n}\frac{1}{\sigma - p_i}$$

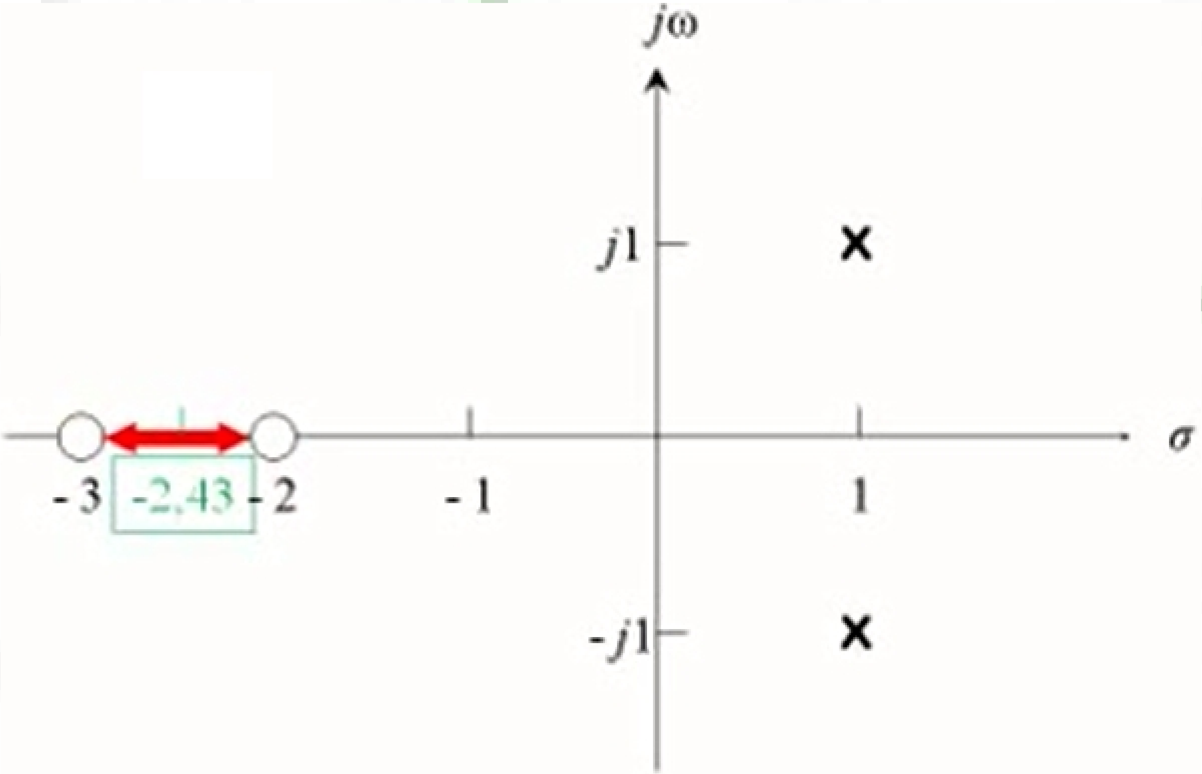
$$\frac{1}{\sigma+2}+\frac{1}{\sigma+3}=\frac{1}{\sigma-1-j}+\frac{1}{\sigma-1+j}$$

$$7\sigma^2+8\sigma-22=0$$

$$\sigma=\begin{cases}1{,}29\\ -2{,}43\end{cases}$$

Exemplo

$$\theta = \frac{180}{n} \qquad n = nº\ polos$$



Exemplo

Para se obter apenas um rascunho...

1º Passo: Determinar o número de ramos

2º Passo: Determinar os segmentos sobre o eixo real

3º Passo: Determinar onde estão os pólos ou zeros no infinito

Para detalhar o Lugar Geométrico das Raízes

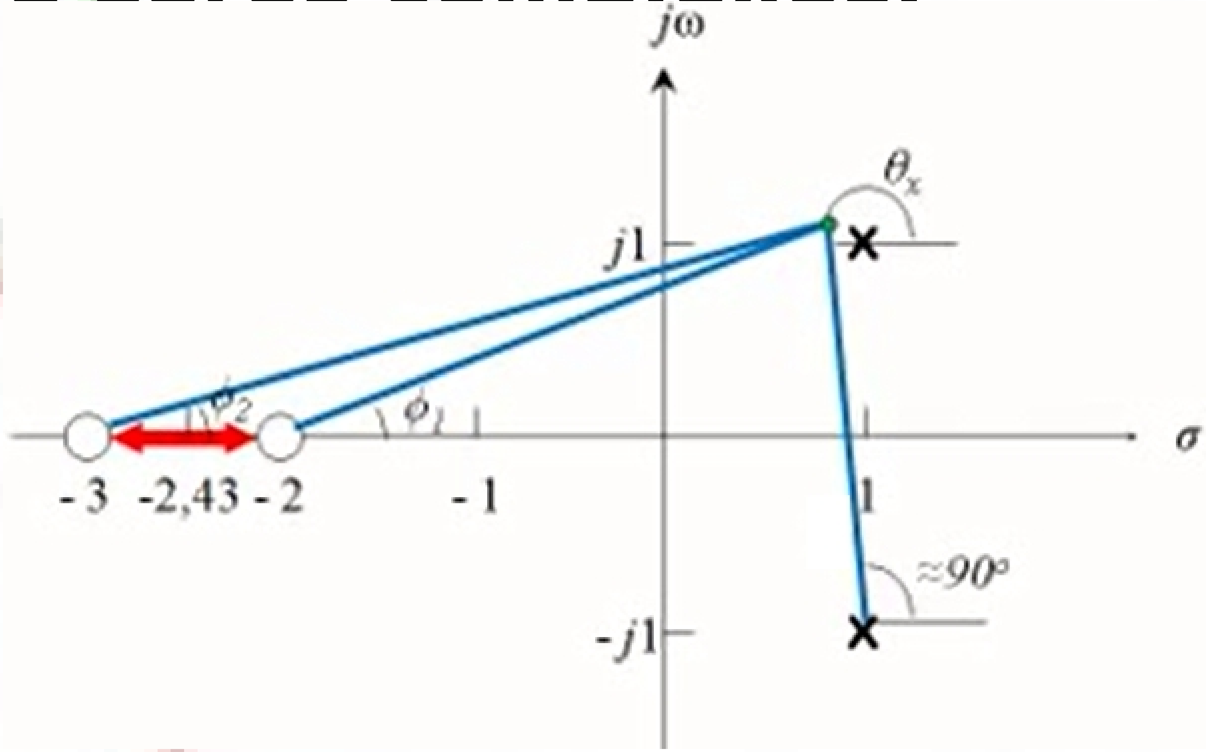
4º Passo: Determinar os ângulos e os pontos de chegada e partida no eixo real

5º Passo: Determinar os ângulos de partida e chegada nos pólos e zeros complexos

6º Passo: Determinar os pontos de interseção com o eixo dos imaginários

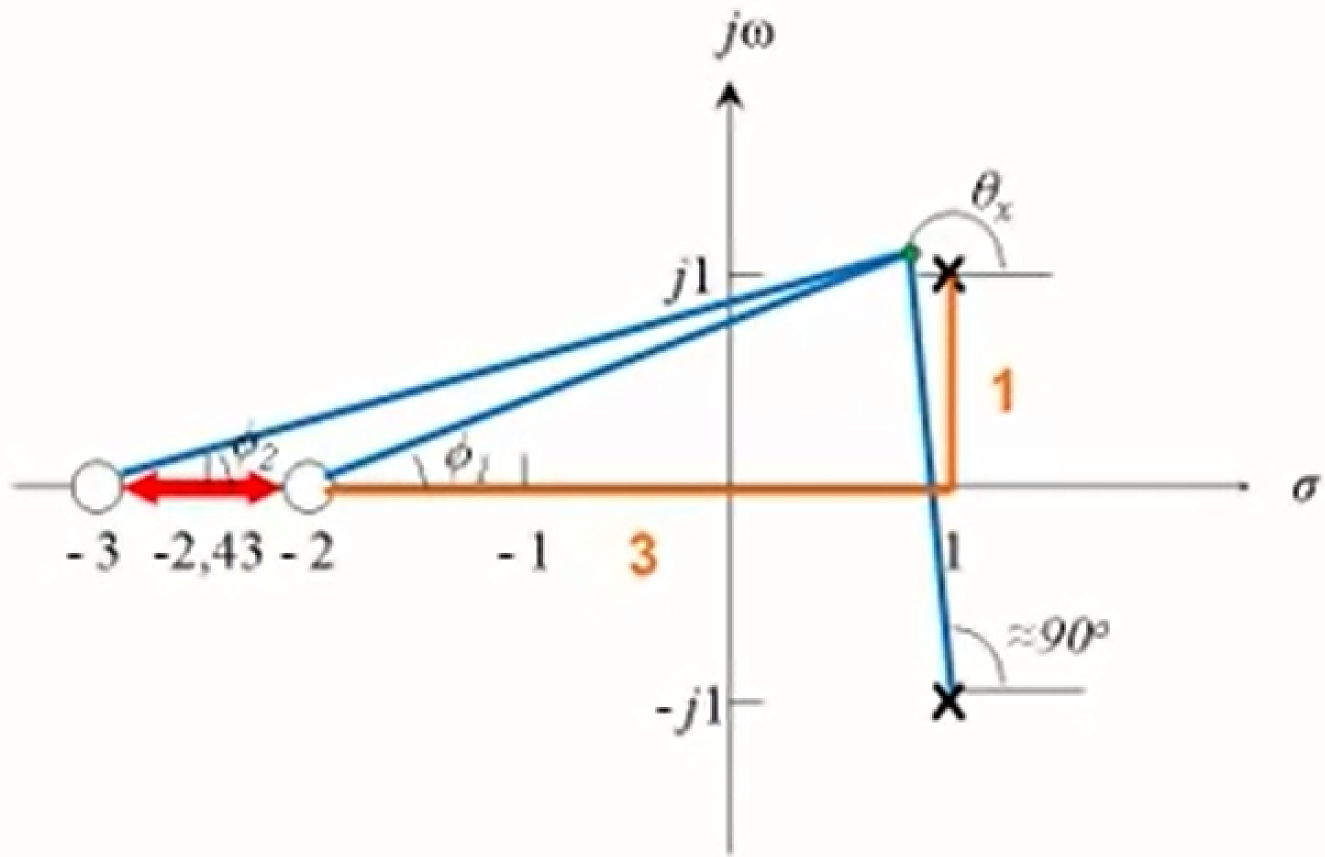
Exemplo

- **Quinto Passo: determinar os ângulos de partida e chegada nos polos e zeros complexos.**



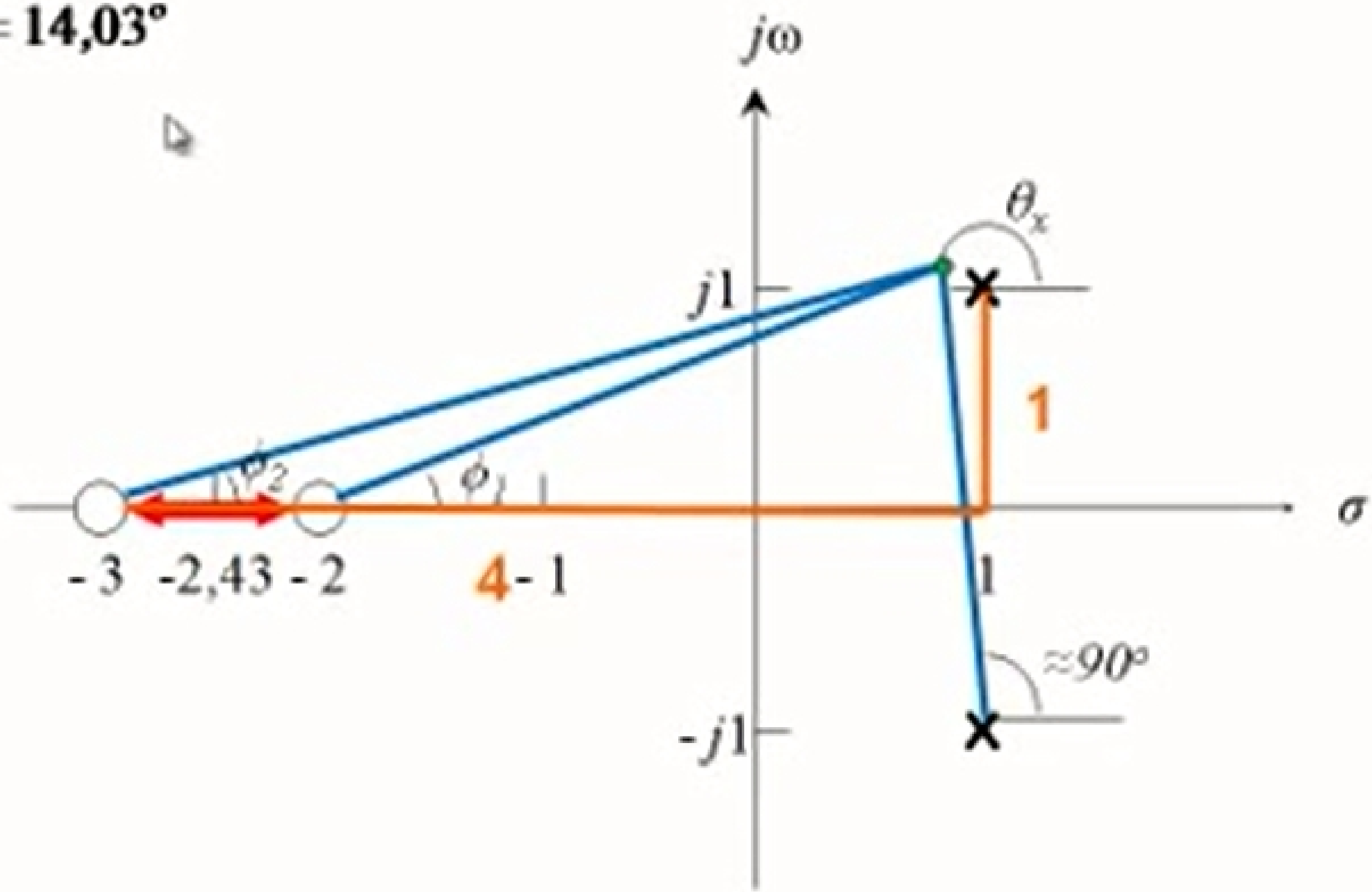
Exemplo

$$\phi_1 = arctag\frac{1}{3} = 18{,}43^o$$



Exemplo

$$\phi_2 = arctag\,\frac{1}{4} = 14{,}03°$$



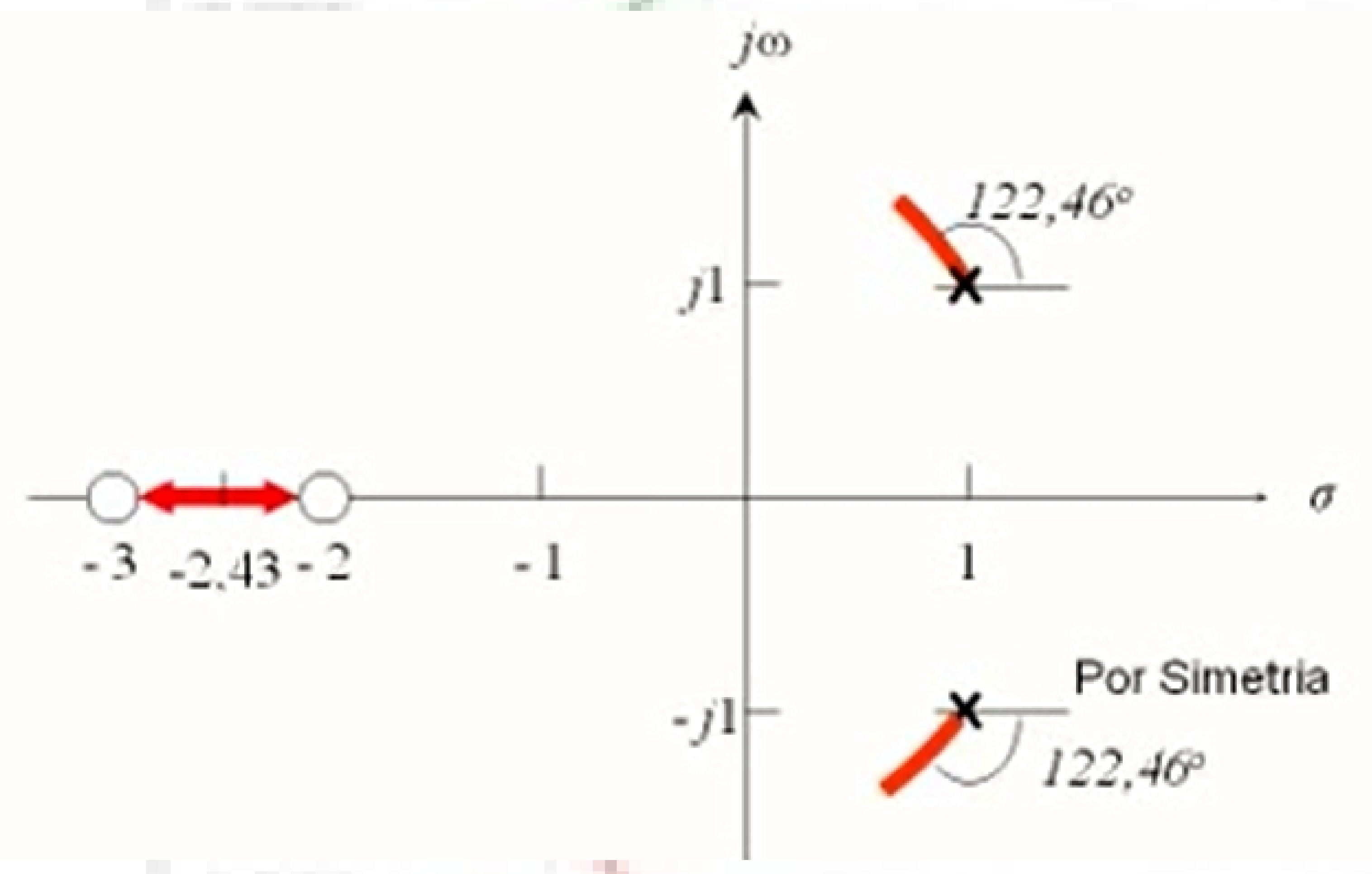
Exemplo

Aplicando a condição de ângulo aos valores encontrados:

$$\phi_1 + \phi_2 - 90 - \theta_x = 18{,}43^\circ + 14{,}03^\circ - 90 - \theta_x$$

$$\theta_x = 122{,}46^\circ$$

Exemplo



Exemplo

Para se obter apenas um rascunho...

1º Passo: Determinar o número de ramos

2º Passo: Determinar os segmentos sobre o eixo real

3º Passo: Determinar onde estão os pólos ou zeros no infinito

Para detalhar o Lugar Geométrico das Raízes

4º Passo: Determinar os ângulos e os pontos de chegada e partida no eixo real

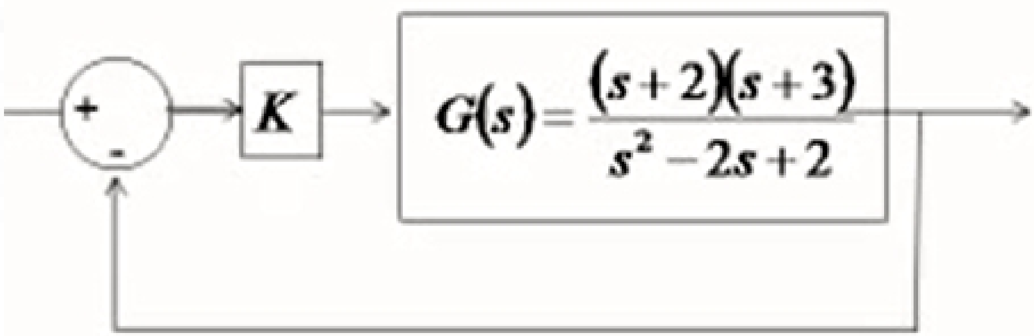
5º Passo: Determinar os ângulos de partida e chegada nos pólos e zeros complexos

6º Passo: Determinar os pontos de interseção com o eixo dos imaginários

Exemplo

- **Sexto Passo: determinar o ponto onde o LGR cruza o eixo imaginário.**

Utiliza-se a função de transferência de malha fechada. Pelo sistemas dado, o controlador é somente um ganho K e realimentação é unitária.



$$G(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{(1+K)s^2 + (5K-2)s + 2 + 6K}$$

Exemplo

Aplicando a regra de Routh nessa FTMA:

$$\begin{array}{lll} s^2 & 1+K & 2+6K \\ s^1 & (5K-2) & 0 \\ s^0 & 2+6K & \end{array}$$

$$(5K-2)s=0$$

$$(5K-2)=0$$

$$K=2/5$$

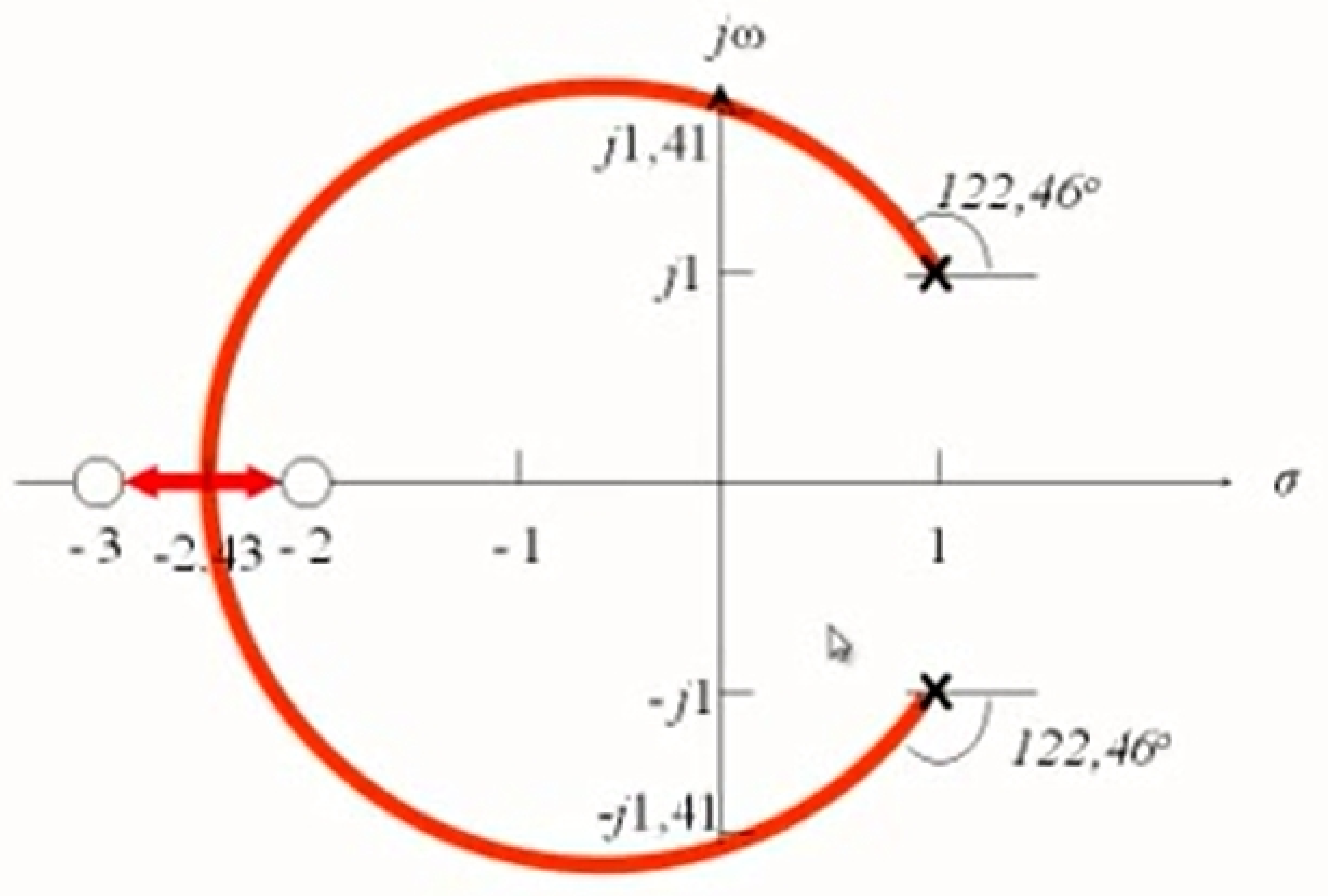
$$(1+K)s^2+2+6K=0$$

$$(1+2/5)s^2+2+2\cdot(2/5)=0$$

$$s^2=-2$$

$$s=\pm j1{,}41$$

Exemplo

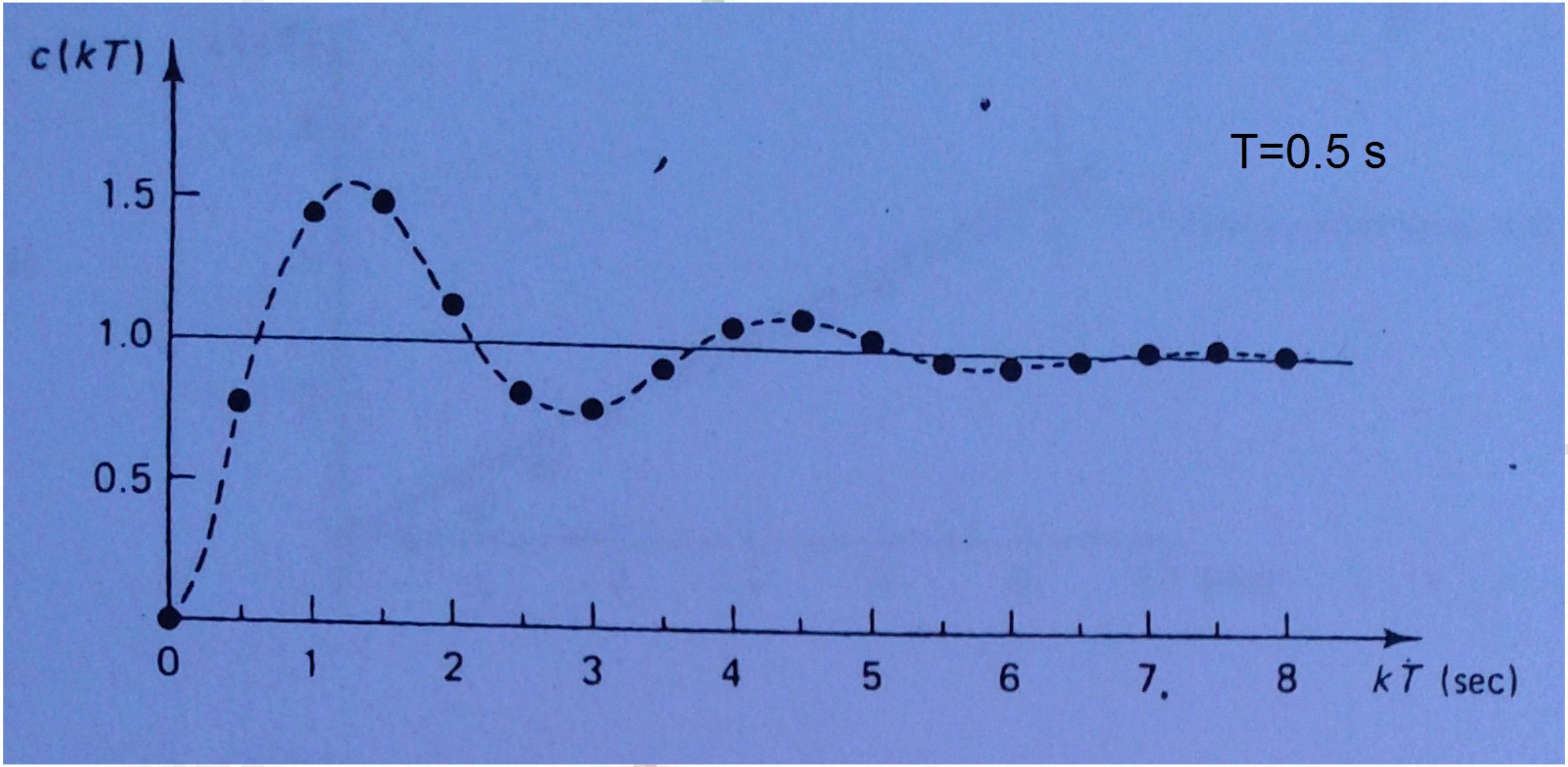


Projeto de Controladores Utilizando o LGR

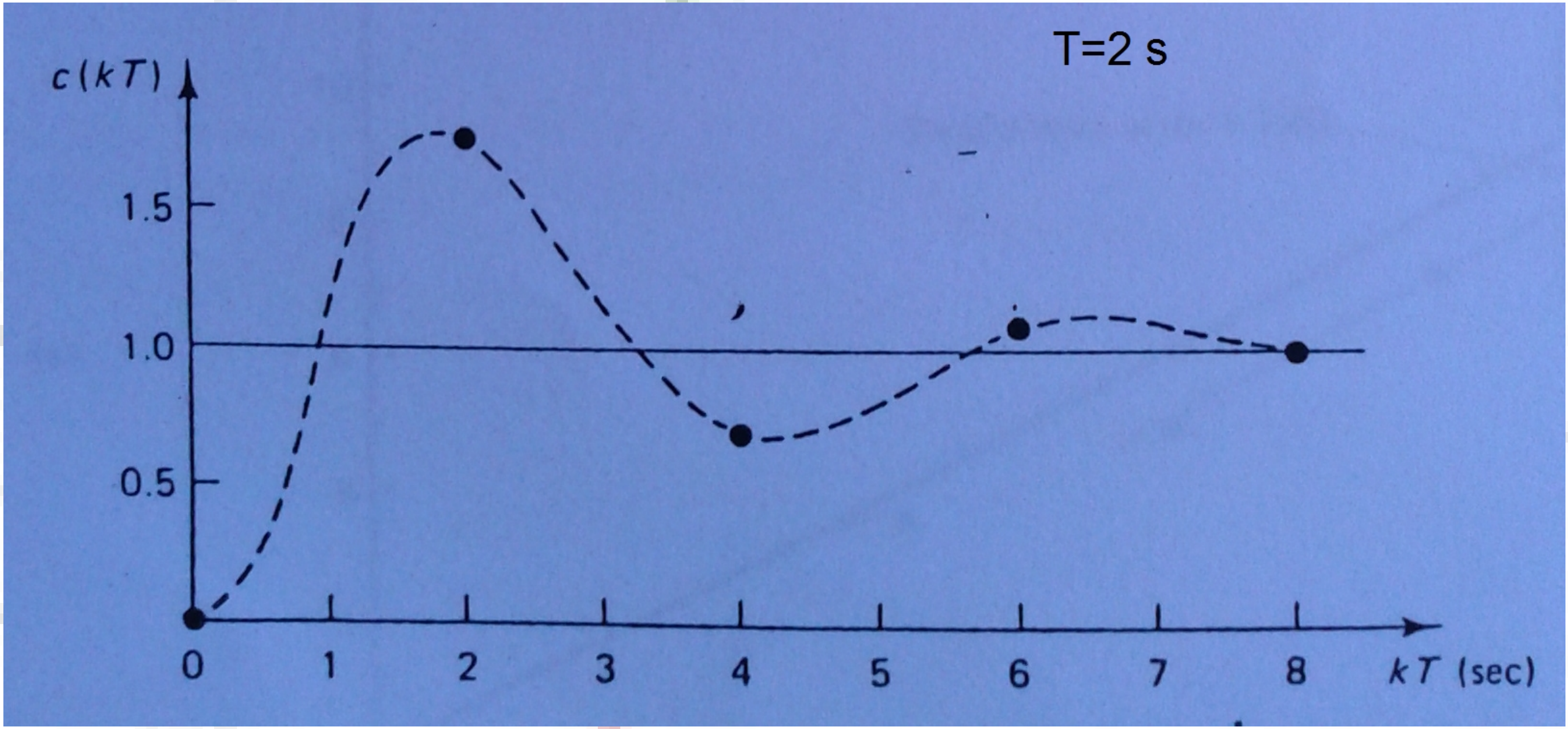
No projeto de um controlador digital, é importante definir corretamente o período de amostragem.

Apenas seguir o Teorema da Amostragem não é o suficiente uma vez que T influencia na resposta dinâmica do sistemas como: tempo de subida, tempo de acomodação, overshoot e erro em regime estacionário.

Projeto de Controladores Utilizando o LGR



Projeto de Controladores Utilizando o LGR



Projeto de Controladores Utilizando o LGR

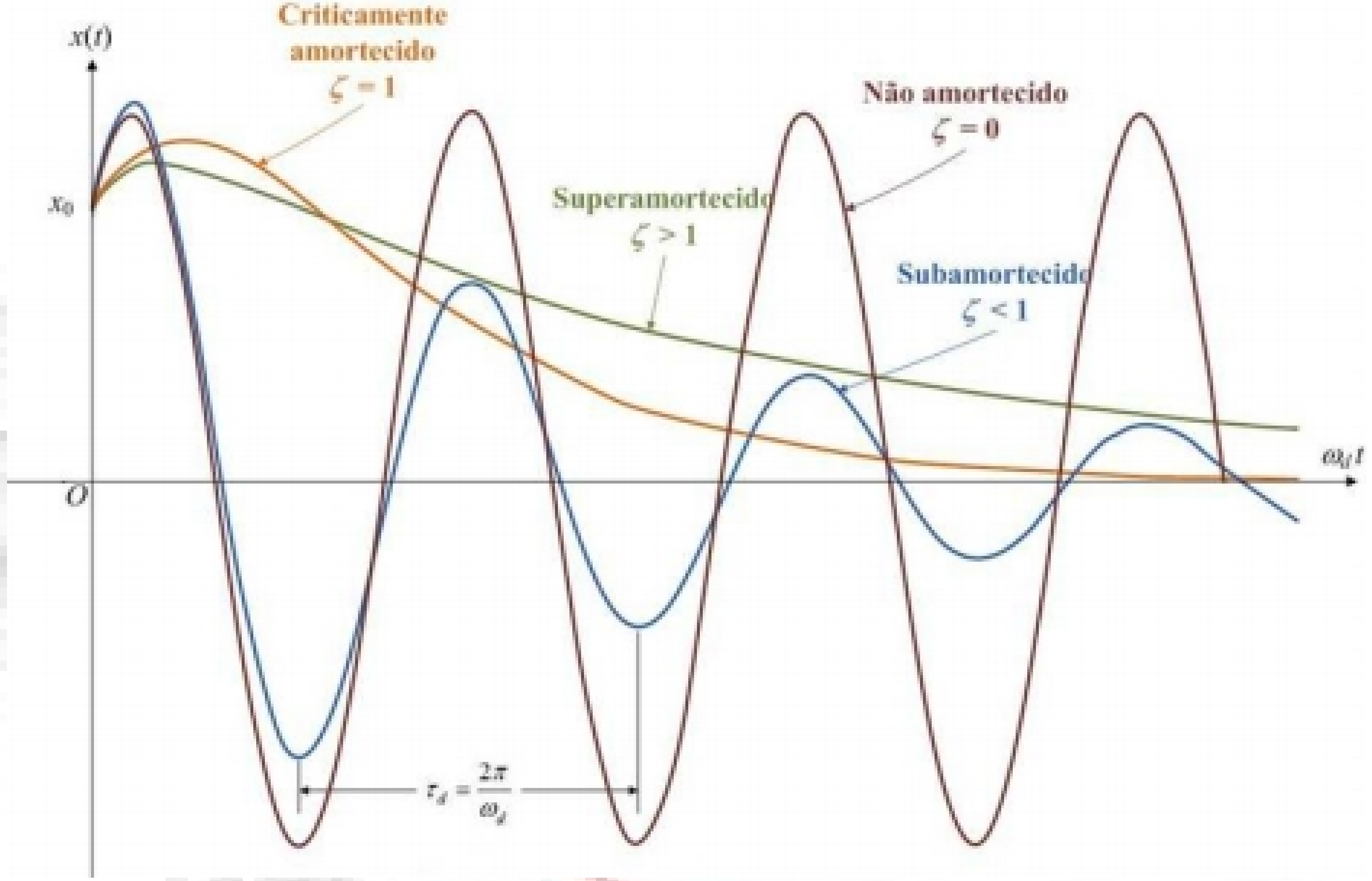
Uma regra para a escolha de T é:

- Sistema subamortecido: amostrar de 8 ou mais vezes durante um ciclo de oscilação (ω_d).
- Sistema superamortecido: amostrar de 8 ou mais vezes durante o tempo de subida.

Utilizar a relação $n = \frac{\omega_s}{\omega_d}$ onde

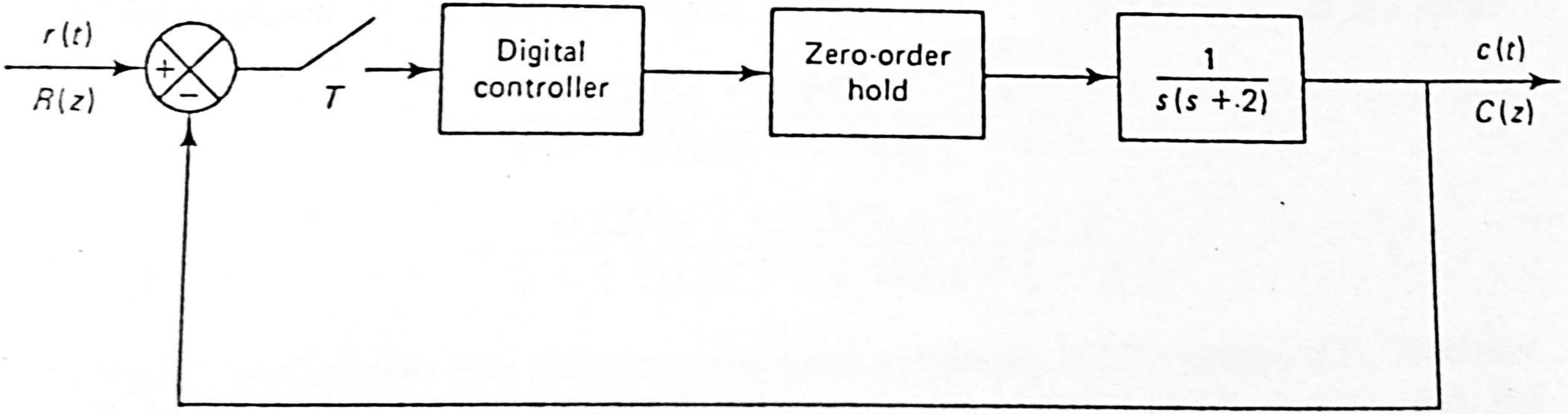
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Projeto de Controladores Utilizando o LGR



Projeto de Controladores Utilizando o LGR

Projetar o controlador digital tal que os polos de MF tenham uma razão de amortecimento de $\zeta = 0.5$ e um tempo de acomodação de $t_s = 2\ s$. Assume-se T=0.2 s.



Referências Bibliográficas

- OGATA, Katsuhiko. Egenharia de Controle Moderno. São Paulo:Pearson Prentice Hall, 4º ed., 2003.
- NISE, Norman S. Control Systems Engineering. John Wiley & Sons, 2005.