Sistemas discretos em espaço de estados

Adrielle C. Santana

Introdução

A análise de sistemas por espaço de estados foi criada para facilitar tal análise para sistemas que possuem **múltiplas entradas e múltiplas saídas**.

Esse método é baseado na descrição das equações do sistema em termos de n equações de diferenças de primeira ordem combinadas em uma matriz de equações de primeira ordem.

Introdução

A representação em espaço de estados permite trabalhar com sistemas multivariáveis, que são os mais comuns, além de permitir a aplicação de diversos métodos de projeto de controladores tais como:

- Controle Ótimo;
- Controle Adaptativo;
- Controle Não-Linear.

Métodos convencionais (LGR ou Resposta em Frequência) podem ser usados em sistemas não-lineares em alguns casos mais simples.

Introdução

Estado: o estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis tais que o conhecimento delas em $t=t_0$ em conjunto com o conhecimento da entrada em $t \geq t_0$ determina completamente o comportamento do sistema em qualquer momento $t \geq t_0$.

Introdução

Variável de estado: é a variável que em conjunto com outras definem o estado do sistema dinâmico.

Obs.: Tais variáveis não necessariamente precisam ser quantidades mensuráveis ou observáveis para serem definidas com variáveis de estado.

Introdução

Vetor de estado: é um vetor composto pelas variáveis de estado necessárias para descrever o sistema dinâmico. É o vetor que determina o estado do sistema $\mathbf{x}(t)$ em qualquer momento $t \geq t_0$ uma vez que o estado em $t=t_0$ é dado e a entrada $\mathbf{u}(t)$ em $t \geq t_0$ é especificada.

Introdução

Espaço de estado: é o espaço n-dimensional cujos eixos coordenados consistem de x_n eixos.

Equações de espaço de estados: na análise em espaço de estados trabalhamos com três tipos de variáveis: variáveis de entrada, de saída e de estado. Elas compõem as equações de estado dadas como segue.

Introdução

"Equação de estado"

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k), k]$$

"Equação de saída"

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k), k]$$

Para sistemas discretos lineares e variantes no tempo essas equações são simplificadas para:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k)$$

Introdução

Onde:

x(k) = n-vetor (vetor de estados)

y(k)=m-vetor (vetor de saídas)

u(k)=r-vetor (vetor de entradas)

G(k)=nxn - matriz (matriz de estados)

H(k)=nxr - matriz (matriz de entradas)

C(k)=mxn - matriz (matriz de saídas)

D(k)=mxr - matriz (matriz de transmissão direta)

Introdução

Se as matrizes **H, G, D** e **C** forem invariantes no tempo então as últimas duas equações são simplificadas para:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

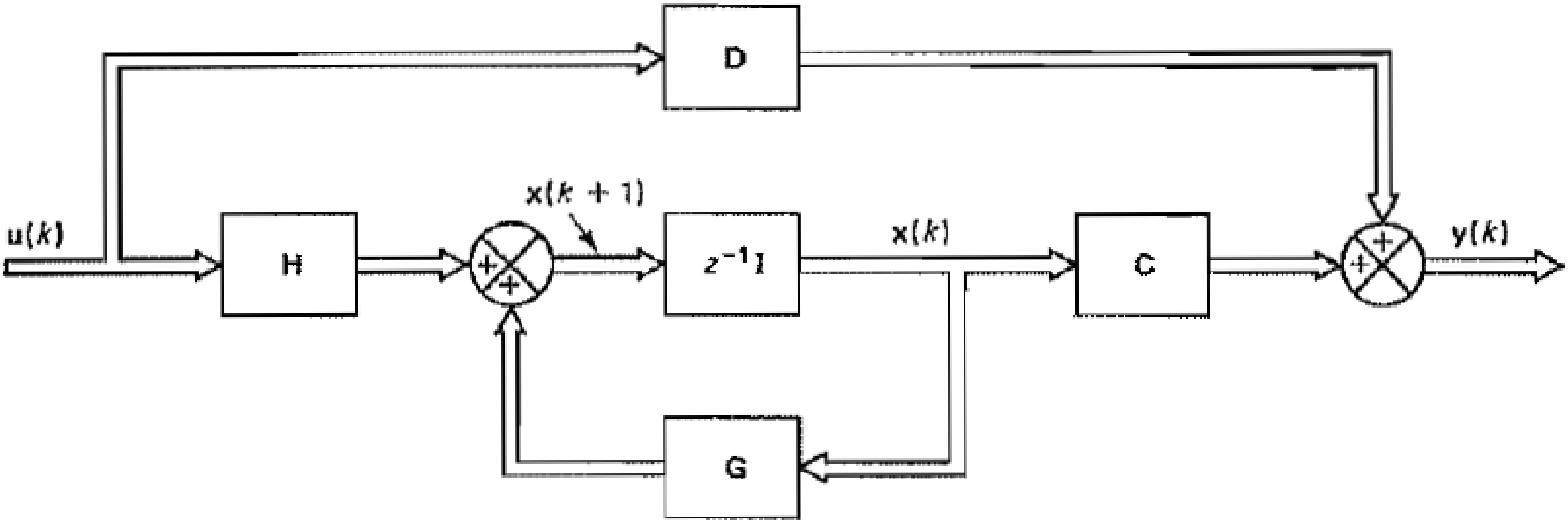
Que no domínio do tempo equivalem a:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

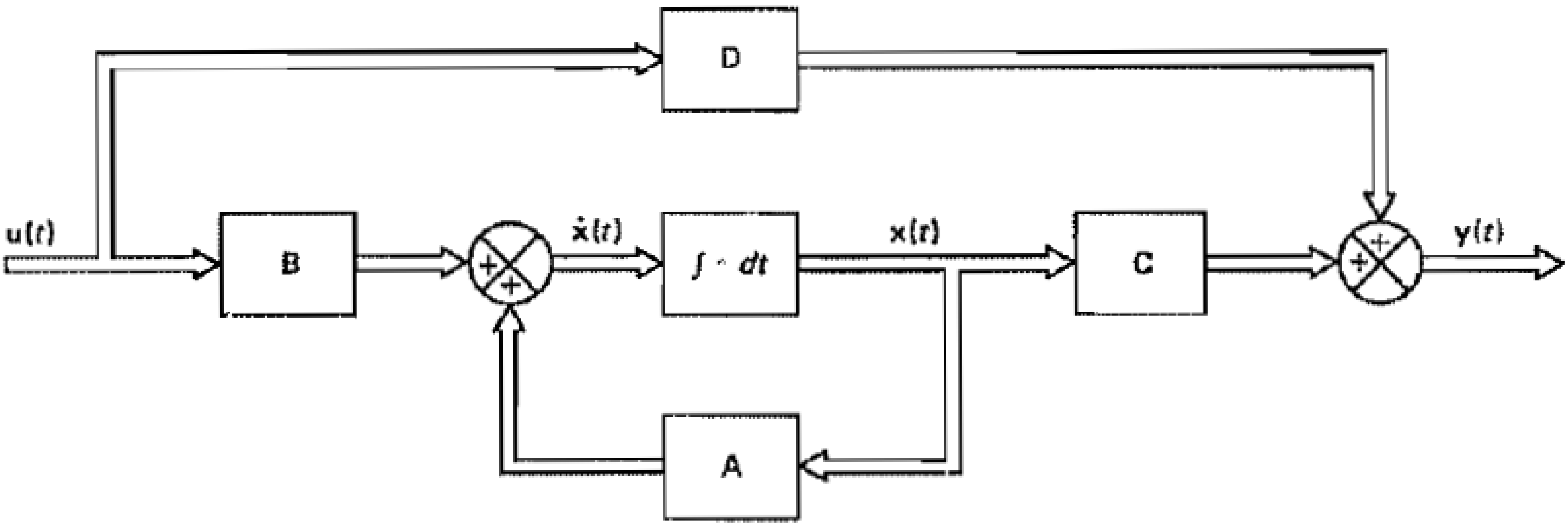
Introdução

Diagrama de blocos do sistema de controle discreto e invariante no tempo em espaço de estados.

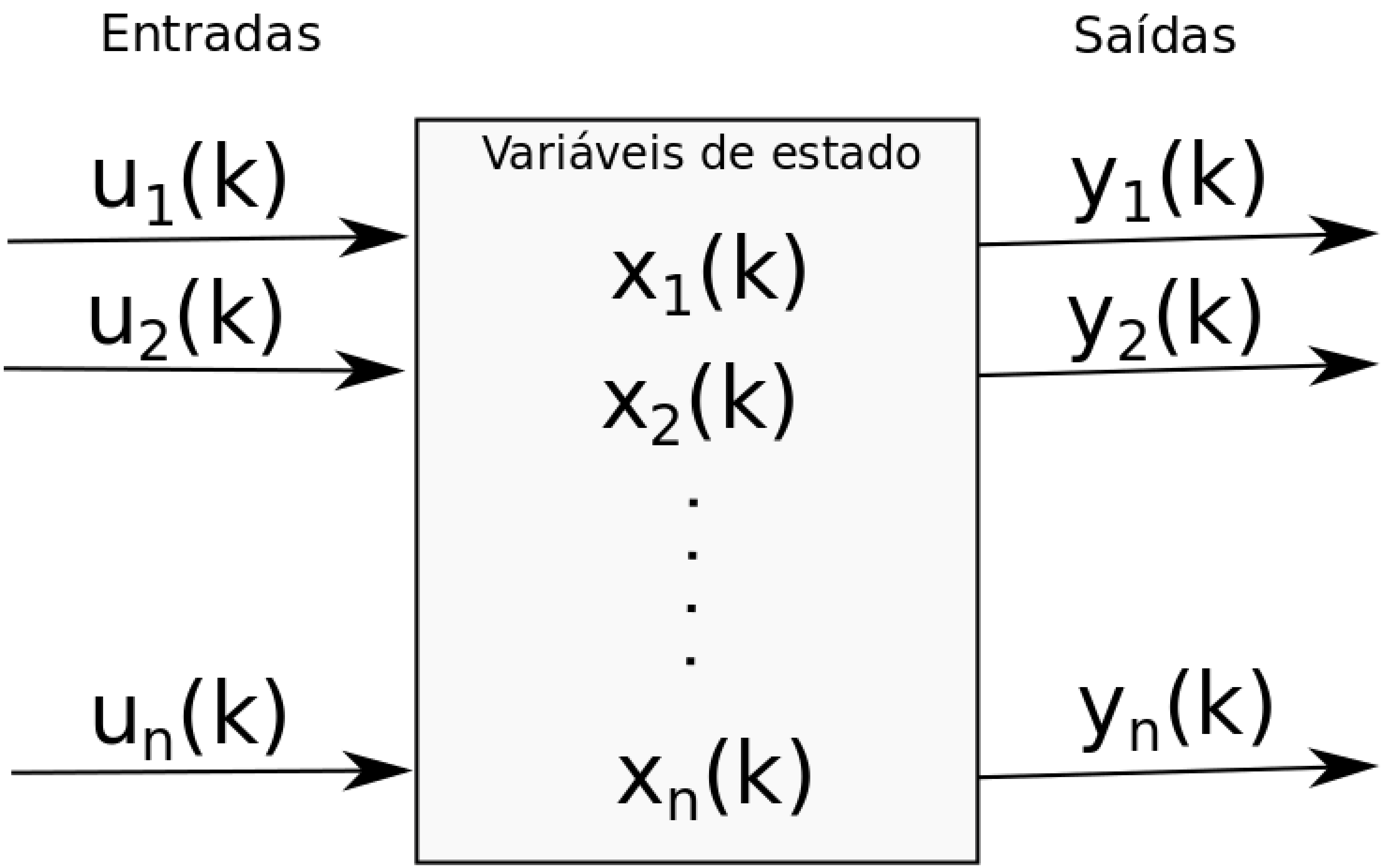


Introdução

Diagrama de blocos do sistema de controle contínuo e invariante no tempo em espaço de estados.



Introdução



Entradas
Saídas
Variáveis de estado
$u_1(k)$
$u_2(k)$
$u_n(k)$
$x_1(k)$
$x_2(k)$
$x_n(k)$
$y_1(k)$
$y_2(k)$
$y_n(k)$

No MATLAB

Seja a função de transferência discreta dada por:

```
         z^2 + 2 z + 1
G(z)= ---------------------
      z^3 + 2 z^2 + z + 0.5
```

Para obter sua representação em espaço de estados segue o comando:

[G,H,C,D]=tf2ss([0 1 2 1],[1 2 1 0.5])

Para operação contrária utilize o comando:

[num,den]=ss2tf(G,H,C,D)

No MATLAB

O sistema de controle de um satélite tem seu modelo descrito por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.25 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

$x_1(k)$=posição angular.
$x_2(k)$=velocidade angular.

Analise sua estabilidade.

Comandos:

```
G=[1 1; 0 1]
H=[0.125;0.25]
C=[1 0]
[num,den]=ss2tf(G,H,C,0)
sis=tf(num,den,1)
f=feedback(sis,1)
pzmap(f)
```

Representações em Espaço de Estados

Seja um sistema de tempo discreto descrito por uma das formas:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

ou

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Representações em Espaço de Estados

Representação pela forma “Canônica Controlável”

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \vdots b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \vdots \cdots \vdots b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

Representações em Espaço de Estados

Exemplo: seja o sistema dado por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 1}{z^2 + 1.3z + 0.4}$$

Sua representação em espaço de estados pela forma canônica controlável é (n=2):

(a_n=a_2=0.4, a_1=1.3, b_0=0, b_1=1 e b_n=b_2=1)

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Representações em Espaço de Estados

Representação pela forma "Canônica Observável"

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

Representações em Espaço de Estados

Exemplo: seja o sistema dado por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 1}{z^2 + 1.3z + 0.4}$$

Sua representação em espaço de estados pela forma canônica observável é:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Bibliografia

Ogata, K. (1995). *Introduction to Discrete-Time Control Systems*, Englewood Cliffs, New Jersey, EUA: Prentice Hall