

Pedro M. Oliveira dos Reis Soares

Discretização de
Controladores Contínuos

DEEC
FEUP
1996

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

**DISCRETIZAÇÃO DE
CONTROLADORES CONTÍNUOS**

Pedro Manuel Oliveira dos Reis Soares

DEEC

FEUP

**Licenciado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores pela Faculdade de
Engenharia da Universidade do Porto**

**Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de mestre em
Engenharia Electrotécnica e de Computadores
(Área de especialização de Sistemas)**

**Dissertação realizada sob a supervisão de
Professor Doutor Paulo Jorge de Azevedo Lopes dos Santos,
do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores
da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto**

Porto, Outubro de 1996

621.3(043)SOAP/DIS

7799

9

Outubro de 1996

Resumo

Este trabalho tem como objectivo a comparação de vários métodos de discretização de controladores, com um método que propomos. Para esse efeito, adoptamos uma estrutura em sete capítulos.

No primeiro, apresentamos a evolução histórica da matéria em estudo, bem como as linhas gerais que norteiam o trabalho. No segundo, fazemos uma introdução ao domínio dos controladores digitais, apresentando vantagens e desvantagens destes relativamente aos controladores contínuos. Fazemos ainda a apresentação de alguns aspectos teóricos a ter em conta no estudo de sistemas discretos. Nos terceiro e quarto capítulos, apresentamos diversos métodos de discretização já existentes. Estes, são separados em nos de malha aberta (capítulo 3 - métodos de Euler, Diferencial, Tustin, Elementos Retentores, Boxer-Thaler, Madwed-Truxal, Resposta Invariante e Mapeamento de Pólos e Zeros), e nos de malha fechada (capítulo 4 - métodos de Rattan, Kennedy e Adams, Keller e Anderson e finalmente Willianson, Blackmore e Mareels). No capítulo 5 propomos um novo método a que chamamos Aproximação Logarítmica. Apesar de ser de malha aberta, optamos por fazer a sua apresentação num capítulo próprio. Este método baseia-se na aproximação da resposta em frequência em malha aberta de sistemas contínuos e sistemas discretos, sendo um dos motivos deste trabalho. No capítulo 6, apresentamos três exemplos que ilustram o desempenho dos vários métodos. Finalmente, no capítulo 7 apresentamos as conclusões.

Podemos dizer que os métodos em malha fechada são bons, principalmente porque permitem utilizar frequências de amostragem baixas, relativamente ao recomendado. Dos métodos de malha aberta (sem contar com o da Aproximação Logarítmica), o de Tustin é o melhor, produzindo resultados muito satisfatórios nos três exemplos em que foi testado. O método de Aproximação Logarítmica, apresenta resultados semelhantes ao de Tustin, com a vantagem de, em certas situações, reduzir a ordem do controlador, permitindo uma implementação mais fácil.

Outubro de 1996

Abstract

This work proposes to compare, several discretization methods, with a new one presented. It is divided in seven chapters, in the following way.

The first, presents de historical background to the subject we study, as well as the main lines of this presentation. On the second, we introduce digital controllers, stating their advantages and disadvantages with respect to the continuous ones. We also present some of the theoretical bases of digital systems. The third and fourth chapters, are used to show several discretization methods. This are the Open Loop ones (chapter three - Euler, Backward Difference, Tustin, Forming Elements, Boxer-Thaler, Madwed-Truxal, Invariant Response and Matched Poles and Zeroes), and the Closed Loop ones (chapter four - Rattan, Kennedy and Evans, Keller and Anderson, and finally, Willianson, Blackmore and Marrels). Chapter five is devoted to the new method proposed in this work, called Logarithmic Approximation. Although it is an open loop method, we chose to present it in a separate chapter. This method, based on the approximation of the frequency response of the continuous and discrete systems, is one of the reasons to undertake this work. Three numerical examples, used to study the performance of the various methods, are presented in chapter six. The conclusions, are drawn in chapter seven.

The closed loop methods, perform very well. One the main advantages this methods give, is the possibility to use low sampling rates, significantly bellow the sampling rates recommended. In the open loop methods group, Tustin distinguishes itself due to the good performances it produces. Logarithmic Approximation performances, are similar to those of Tustin, with the important advantage of producing a model order reduction, which allows easier implementation.

Outubro de 1996

Résumé

L'objectif de ce travail est la comparaison de plusieurs méthodes de discrétisation de contrôleurs avec un autre qu'on propose. Pour cela, on adopte une structure avec sept chapitres.

Dans le premier, on présente l'évolution historique de la matière en étude et aussi les lignes générales qui orientent le travail. Dans le deuxième, on fait une introduction au domaine des contrôleurs digitaux, en présentant les avantages et les désavantages de ceux-ci, par opposition aux contrôleurs continus. On fait encore la présentation de quelques aspects théoriques à prendre en considération dans l'étude des systèmes discrets. Dans les troisième et quatrième chapitres, on présente plusieurs méthodes de discrétisation déjà existants. Ceux-ci sont séparés en méthodes à chaîne ouverte (chapitre trois - méthodes d'Euler, Différentiel, Tustin, Éléments Rétenteurs, Boxer-Thaler, Madwed-Truxal, Réponse Invariante et Transformation de Pôles et Zéros) et à chaîne fermée (chapitre quatre - méthodes de Rattan, Kennedy et Adams, Keller et Anderson et finalement Willianson, Blackmore et Mareels). Dans le chapitre cinq on propose un nouveau méthode, auquel on appelle Rapprochement Logarithmique. Bien qu'il soit à chaîne ouvert, on choisi de faire sa présentation dans un chapitre séparé. Ce méthode se fonde dans le rapprochement de la réponse en fréquence à chaîne ouverte de systèmes continus et de systèmes discrets, en étant un des motifs de ce travail. Dans le chapitre six, on présente trois exemples qui expliquent le dégagement des différents méthodes. À la fin, dans le chapitre sept, on présente les conclusions. On peut dire que les méthodes à chaîne fermée sont bons, surtout parce qu'ils permettent d'utiliser les fréquences d'échantillonnage basses, par rapport à ce qui est recommandé. Des méthodes à chaîne ouverte (à part celui du Rapprochement Logarithmique) celui de Tustin est le meilleur, parce qu'il produit des résultats satisfaisants dans les trois exemples où il a été testé. Le méthode du Rapprochement Logarithmique présente des résultats semblables à celui de Tustin, avec l'avantage de, dans certaines situations, réduire l'ordre du contrôleur et permettre une implantation plus facile.

Prefácio

Antes de apresentar o trabalho, queria agradecer ao Prof. Paulo Lopes dos Santos, a oportunidade que me proporcionou de o realizar e o apoio demonstrado ao longo da sua elaboração. Agradeço em especial o esforço de rever a primeira versão desta dissertação no curto espaço de tempo a que foi obrigado pelas circunstâncias.

Cabe também referir aqui, que parte deste trabalho foi realizado nas instalações do Instituto de Sistemas e Robótica, que sempre abriu as suas portas para esse efeito. O meu agradecimento aos responsáveis do instituto, nomeadamente ao Prof. Martins de Carvalho

Por último gostaria de agradecer à Ângela, todo o apoio e paciência demonstrada. Por esse motivo lhe dedico este trabalho e todo o esforço que nele investi.

INDÍCE

1 - Introdução.....	5
2 - Controladores Digitais.....	10
2.1 - <i>INTRODUÇÃO</i>	10
2.2 - <i>DISCRETIZAÇÃO EXACTA</i>	11
2.3 - <i>MAPEAMENTO ENTRE O PLANO S E O PLANO Z</i>	13
2.4 - <i>PROJECTO DE SISTEMAS NO DOMÍNIO DISCRETO VERSUS DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS CONTÍNUOS</i>	19
2.5 - <i>"ALIASING" OU "FOLDING"</i>	20
2.6 - <i>O TEOREMA DE SHANNON E A FREQUÊNCIA DE NYQUIST</i>	21
2.7 - <i>O RETENTOR DE ORDEM 0</i>	24
2.8 - <i>DISCRETIZAÇÃO DE CONTROLADORES</i>	27
3 - Métodos em Malha Aberta (Open Loop).....	28
3.1 - <i>INTRODUÇÃO</i>	28
3.2 - <i>MÉTODO DE EULER</i>	29
3.3 - <i>MÉTODO DIFERENCIAL</i>	30
3.4 - <i>MÉTODO DE TUSTIN</i>	32
3.5 - <i>MÉTODO DOS ELEMENTOS RETENTORES</i>	36
3.6 - <i>MÉTODO DE BOXER-THALER</i>	38
3.7 - <i>MÉTODO DE MADWED-TRUXAL</i>	40
3.8 - <i>MÉTODO DA RESPOSTA INVARIANTE</i>	42
3.9 - <i>MÉTODO DO MAPEAMENTO DE PÓLOS E ZEROS</i>	44
4 - Métodos em Malha Fechada (Closed Loop).....	46
4.1 <i>INTRODUÇÃO</i>	46
4.2 - <i>MÉTODO DE RATTAN</i>	46
4.3 - <i>MÉTODO DE KENNEDY E EVANS</i>	52
4.4 - <i>MÉTODO DE KELLER E ANDERSON</i>	55
4.5 - <i>MÉTODO DE BLACKMORE, WILLIAMSON E MAREELS</i>	58

5 - Aproximação Logarítmica	63
5.1 - INTRODUÇÃO.....	63
5.2 - DISCRETIZAÇÃO ATRAVÉS DA APROXIMAÇÃO ENTRE RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA EM MALHA ABERTA.....	63
5.3 - O ALGORITMO DE IDENTIFICAÇÃO DE PARAMÉTRICA NO DOMÍNIO DAS FREQUÊNCIAS.....	65
6 - Exemplos	68
6.1 - INTRODUÇÃO.....	68
6.2 - SISTEMAS DE TESTE.....	68
6.3 - DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE KATZ.....	75
6.3.1 - Discretização pelo método de Euler.....	76
6.3.2 - Discretização pelo método diferencial.....	76
6.3.3 - Discretização pelo método de Tustin.....	76
6.3.4 - Discretização pelo método de Boxer Thaler.....	78
6.3.5 - Discretização pelo método de Madwed Truxal.....	78
6.3.6 - Discretização pelo método da resposta invariante ao degrau.....	78
6.3.7 - Discretização pelo método de mapeamento de pólos e zeros.....	79
6.3.8 - Discretização pelo Algoritmo de aproximação logarítmica.....	79
6.3.9 - Discretização de Rattan.....	81
6.3.10 - Discretização de Kennedy e Evans.....	81
6.3.11 - Discretização de Keller e Anderson.....	82
6.3.12 - Discretização de Blackmore, Williamson e Mareels.....	83
6.4 - DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE RATTAN.....	85
6.4.1 - Discretização pelo método de Euler.....	86
6.4.2 - Discretização pelo método diferencial.....	87
6.4.3 - Discretização pelo método de Tustin.....	89
6.4.4 - Discretização pelo método de Boxer Thaler.....	90
6.4.5 - Discretização pelo método de Madwed Truxal.....	91
6.4.6 - Discretização pelo método da resposta invariante ao degrau.....	91
6.4.7 - Discretização pelo método de mapeamento de pólos e zeros.....	92
6.4.8 - Discretização pelo Algoritmo de aproximação logarítmica.....	94
6.4.9 - Discretização de Rattan.....	96
6.4.10 - Discretização de Kennedy e Evans.....	97
6.4.11 - Discretização de Keller e Anderson.....	97
6.4.12 - Discretização de Blackmore, Williamson e Mareels.....	99
6.5 - DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE GRENOBLE.....	99
6.5.1 - Discretização pelo método de Euler.....	100
6.5.2 - Discretização pelo método diferencial.....	101
6.5.3 - Discretização pelo método de Tustin.....	101
6.5.4 - Discretização pelo método da resposta invariante ao degrau.....	104
6.5.5 - Discretização pelo método de mapeamento de pólos e zeros.....	105
6.5.6 - Discretização pelo Algoritmo de aproximação logarítmica.....	107
6.5 - COMPARAÇÃO GERAL DOS RESULTADOS.....	110
7 - Conclusões	112

Bibliografia	114
---------------------------	------------

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1 - Introdução

Desde a antiguidade o homem tem o ensejo de controlar sistemas sem a sua intervenção directa. Podemos encontrar sistemas de controlo muito rudimentares, baseados somente na utilização bastante engenhosa de leis físicas desde à muitos séculos. A partir do final do séc. XIX e principalmente já no sec. XX, importantes desenvolvimentos surgem no campo do controlo, surgindo os primeiros estudos teóricos destes sistemas.

A partir de meados deste século, com o aparecimento do computador, um novo campo se abriu aos sistemas de controlo, baseado precisamente na utilização dos computadores. De facto, a partir dos anos cinquenta, com o desenvolvimento da aviação, a necessidade de comandar a crescente área dos mísseis e o advento da era espacial, novos problemas se colocaram aos engenheiros de controlo. A complexidade dos sistemas a controlar aumentou consideravelmente. Os sistemas que até então eram do tipo “uma entrada uma saída” passaram a ter várias entradas e várias saídas. Desenvolveu-se a teoria de espaço de estados para fazer face a estes novos problemas. Formou-se a “International Federation of Automatic Control”, cuja primeira conferência, realizada em Moscovo em 1960, serviu para apresentar alguns destes estudos: Iniciou-se nesta década de cinquenta, a chamada teoria de controlo moderna, por oposição à teoria de controlo clássica, que será aquela que se desenvolveu até esta data.

A complexidade destes novos sistemas, levou os engenheiros de controlo a fixarem a sua atenção no uso do computador, que com o seu poder de cálculo prometia resolver alguns problemas. Surgiram então os primeiros estudos sobre a aplicação dos computadores no controlo de mísseis e aviões. Chegou-se à conclusão de que os computadores de uso geral existentes nesta altura, não eram adequados ao controlo destes sistemas, devido ao seu grande tamanho, grande consumo e fraca fiabilidade. Desenvolveram-se então computadores para aplicações específicas de controlo, nomeadamente na área aeroespacial.

A primeira aplicação industrial resultou dum contacto entre a empresa aeroespacial Tohmpson Ramo Woolridge e a petrolífera Texaco, que juntas desenvolveram um importante estudo sobre a instalação de uma fábrica de polímeros controlada por computador. Este estudo, que exigiu um trabalho equivalente a 30 homens/ano, resultou num sistema baseado no computador RW300, que iniciou produção em 12 de Março de

1959. O sistema controlava 26 caudais, 72 temperaturas 3 pressões e 3 composições (químicas). Tinha que controlar estes factores, tentando minimizar a pressão nos reactores, determinar uma distribuição óptima de alimentação dos mesmos, etc. Este trabalho motivou os fabricantes de computadores, que passaram a ver nesta área um campo potencial de aplicação dos seus equipamentos.

Segundo Karl J. Åström [1], podemos dividir em quatro períodos a evolução nesta área.

Tabela 1.1

Período pioneiro	1955
Período DDC (Direct Digital Control)	1962
Período de Minicomputadores	1967
Período de Micro-computadores	1972

No período pioneiro, os computadores utilizados são ainda analógicos, usando válvulas de vácuo. O facto de serem máquinas lentas, caras e pouco fiáveis limitava a sua utilização. De facto, nesta época os tempos de adição e de multiplicação rondavam os 1ms e 20ms, respectivamente. Também o tempo médio entre avarias, rondando entre as 50 e as 100h se tornava um grave obstáculo, uma vez que não se pode confiar o êxito de um sistema muito dispendioso a uma máquina que avaria de 3 em 3 ou de 4 em 4 dias. As operações confiadas ao computador nesta altura resumiam-se basicamente a encontrar condições óptimas de operação, efectuar o escalonamento de operações, planear outros aspectos da produção e a produzir relatórios sobre essa mesma produção. Já nesta altura era necessário conhecer um modelo matemático do sistema, por forma a permitir realizar as optimizações pretendidas. A necessidade de obter bons modelos matemáticos, juntamente com o facto de por vezes não se obter um modelo suficientemente bom através das leis físicas que regem os sistemas, lançou as bases para o início do estudo de métodos de identificação de sistemas. Apesar de todas estas dificuldades, vários sistemas foram desenvolvidos e, em Março de 1961, 37 sistemas tinham já sido desenvolvidos, para as indústrias químicas e do aço e de produção de electricidade.

O período DDC, obtém o seu nome, do facto de os computadores analógicos terem sido substituídos por computadores totalmente digitais que efectuavam directamente a acção

de controlo. Esta inovação foi introduzida pela primeira vez na indústria química, mais propriamente, pela Imperial Chemical Industries (ICI) em Inglaterra, em 1962. Um único computador foi então utilizado para efectuar a leitura de 224 variáveis e o controlo directo de 129 válvulas. Começavam a surgir máquinas mais rápidas, capazes de adicionar em $100\mu\text{s}$ e multiplicar em 1ms , com tempos médios entre avarias de 1000h.

A flexibilidade introduzida com estes novos computadores, com a possibilidade de alterar dados do sistema, simplesmente através de uma reprogramação, veio trazer algum impulso à generalização do seu uso. Começavam então a surgir problemas de investigação relacionados com a escolha do período de amostragem e dos algoritmos de controlo mais apropriados.

O desenvolvimento dos circuitos integrados, veio abrir a porta aos minicomputadores. Diversos fabricantes desenvolveram computadores especificamente para controlo de processos, com palavras de 16 bits. Os tempos de adição e multiplicação baixaram consideravelmente (para $2\mu\text{s}$ e $7\mu\text{s}$, respectivamente). O tempo médio entre avarias subiu para 20000h. A utilização dos minicomputadores para controlo de processos provocou uma expansão bastante grande da sua utilização, já que as suas menores dimensões, baixo consumo e relativamente baixo preço permitiram a sua utilização em projectos de menor dimensão.

O avanço cada vez maior na área dos circuitos integrados e da electrónica, permitiu que dos minicomputadores se passasse aos micro-computadores. Rapidamente estes atingiram desempenhos equivalentes às que os primeiros tinham uns anos antes. Entra-se assim no quarto período, o dos micro-computadores, com tempos de cálculo cada vez maiores e com cada vez mais facilidades de “interface” com o utilizador.

Talvez hoje em dia nos encontremos já num quinto período, o do micro-controlador, integrado especificamente dedicado ao controlo de processos. A utilização destes integrados permite ter hoje pequenos sistemas de controlo com dimensões muito reduzidas e preços bastante baixos, tornando muito acessível o controlo digital e a sua consequente expansão a áreas cada vez mais diversificadas.

A área do controlo, como é dito acima, só a partir de meados do século passado, começou a utilizar os meios informáticos. Anteriormente a esta altura, desenvolveram-se uma série de técnicas e adquiriu-se bastante prática no estudo e projecto de sistemas no domínio analógico. Todo este saber acumulado ainda hoje é muito importante, apesar de

as técnicas digitais terem cada vez mais peso. De facto, hoje em dia grande parte do desenvolvimento de sistemas parte da sua representação analógica, sendo posteriormente alguns dos seus componentes, nomeadamente o controlador, discretizados, com o intuito de serem implementados em computador.

Por este motivo têm grande utilidade e são de grande importância as técnicas de discretização, ou seja, de passagem da representação analógica de sistemas para a sua representação discreta. Só com uma digitalização em que não exista perda significativa das características e do desempenho do controlador contínuo, se consegue que o sistema digitalizado mantenha o desempenho desejado no domínio analógico.

Este trabalho aborda o problema da discretização de controladores contínuos. Para esse efeito, adoptamos uma estrutura em 7 capítulos, que descrevemos sumariamente a seguir.

Capítulo 1 - Introdução

Serve para apresentar a evolução histórica da matéria em estudo, bem como as linhas gerais que norteiam o trabalho.

Capítulo 2 - Controladores Digitais.

Este capítulo faz uma primeira introdução ao domínio dos controladores digitais, apresentando vantagens e desvantagens relativamente aos controladores contínuos. Faz ainda a apresentação de alguns aspectos teóricos, a ter em conta no estudo de sistemas discretos.

Capítulo 3 - Métodos em malha aberta.

Aqui são apresentados os métodos em malha aberta de Euler, Diferencial, Tustin, Elementos Retentores, Boxer-Thaler, Madwed-Truxal, Resposta Invariante e mapeamento de pólos e zeros.

Capítulo 4 - Métodos em malha fechada.

Neste capítulo, apresentamos os métodos em malha fechada que foram apresentados por Rattan, Kennedy e Adams, Keller e Anderson e finalmente Willianson, Blackmore e Mareels.

Capítulo 5 - Aproximação Logarítmica.

Serve este capítulo, para apresentar um método em malha aberta que propomos para a discretização de controladores contínuos. Este método baseia-se na aproximação da resposta em frequência em malha aberta dos sistemas contínuo e amostrado, e é um dos motivos deste trabalho.

Capítulo 6 - Exemplos

Apresentamos aqui três exemplos, que ilustram o desempenho dos métodos descritos neste trabalho

Capítulo 7 - Conclusões

Serve para apresentar as conclusões finais, e apresentar algumas ideias, sobre hipóteses de continuação e aprofundamento do trabalho.

CAPÍTULO 2

CONTROLADORES DIGITAIS

2 - Controladores Digitais

2.1 - INTRODUÇÃO

A grande versatilidade dos sistemas digitais de controlo, quer ao nível do controlador em si, com vantagens relativamente aos controladores analógicos, quer ao nível do interface com o utilizador com a utilização de gráficos, possibilidade de imprimir resultados, etc., fez com que estes se impusessem cada vez mais.

Enumeram-se a seguir, algumas das vantagens dos sistemas digitais

- Possibilidade de utilizar transdutores que efectuem a transformação da grandeza a medir, directamente para um valor digital, com ganhos na imunidade ao ruído.
- Possibilidade de efectuar Telemetria, ou seja, transmissão de dados de várias origens, usando multiplexagem, numa só linha de transmissão.
- Possibilidade de, utilizando equipamento de baixo custo e de baixo consumo, processar algoritmos de grande complexidade e praticamente impossíveis de implementar com controladores analógicos, como sejam:
 - ◆ Processos estocásticos
 - ◆ Espaços de estados de ordem elevada
 - ◆ Controlo adaptativo
 - ◆ Controlo predictivo
- Possibilidade de, enquanto decorre a acção de controlo, alterar o algoritmo que está a ser utilizado, para fazer face a qualquer situação anormal, desencadeada ou por algum operador ou automaticamente por algum alarme.
- Capacidade de armazenar informações com facilidade, guardando em ficheiro a evolução de diversas variáveis, para análise posterior.
- Elaboração de interfaces amigáveis, que permitem a actuação do processo por pessoal não especializado.
- Possibilidade de interligação directa de sistemas CAD/CAE, e actuação directa da planta a partir desses sistemas.

Apesar de todas estas vantagens, existem também alguns problemas associados ao controlo digital, que não se colocam no controlo analógico.

Eis algumas dessas desvantagens:

- O projecto de sistemas e a sua análise matemática podem ser bastante mais complexos do que no caso de sistemas analógicos.
- Um sistema analógico estável pode perder totalmente ou parcialmente a sua estabilidade quando é discretizado.
- A leitura discreta efectuada pelo A/D, faz com que exista uma perda de informação relativamente ao processo a controlar. De facto, entre os intervalos de amostragem, não existe informação sobre a evolução da planta.
- A possibilidade de ocorrerem erros de software, principalmente na implementação de sistemas complexos.
- Um sistema pode ser estável e controlável, mas o facto de existir um tempo necessário ao processamento do algoritmo e à actualização do A/D pode inviabilizar em termos práticos o controlo efectivo.

2.2 - DISCRETIZAÇÃO EXACTA

A transformação de uma representação contínua para uma representação discreta pode ser realizada de uma forma exacta.

Considere-se um sinal $e(t)$, e a sua transformada de Laplace $E(s)$. Se aplicarmos esse sinal a um A/D, obteremos na saída, o sinal $e(t)$ amostrado, que representaremos por $e^*(t)$. A este sinal corresponderá a transformada de Laplace $E^*(s)$.

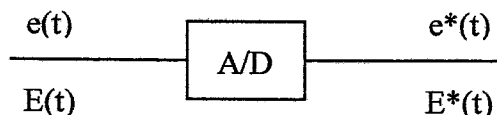


figura 2.1 - relação entre os sinais de entrada e saída de um A/D

Podemos representar $E^*(s)$ da seguinte forma:

$$E^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) e^{-kTs} \quad (2.1)$$

em que T é o período de amostragem.

Efectuando uma simples mudança de variável,

$$z = e^{Ts} \text{ ou } s = \frac{1}{T} \ln z \quad (2.2)$$

podemos afirmar que:

$$E(z) = E^*(s)|_{z=e^{Ts}} = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) z^{-k} \quad (2.3)$$

Isto corresponde à definição de transformada Z .

Para obter uma representação discreta de qualquer sinal, podemos utilizar a definição de transformada Z . Isto implica, no entanto, que tem que ser conhecida a sua representação no tempo à qual se aplica a transformada, ou que se conhece a sua transformada de Laplace.

Se for conhecida a representação temporal, o cálculo da transformada Z pela definição conduz, como se pode facilmente verificar, a uma série infinita em termos de z^{-k} . A partir dessa série, é possível, na maioria dos casos¹, obter uma representação em forma fechada dessa transformada. Se em vez da transformada z de um sinal, pretendermos obter a de um sistema amostrado, teremos que aplicar a transformada z ao sinal correspondente à resposta impulsional desse sistema.

A representação de um sistema discreto, obtida por esta forma, não pode ser utilizada, para determinar a resposta do sistema, a entradas diferentes do impulso de Dirac. De facto, neste aspecto, difere da transformada de Laplace². É por este motivo, que se

¹ Se o sistema for linear e de parâmetros concentrados.

² Neste caso, a função de transferência impulsional, pode ser utilizada para determinar a resposta de um

procuram processos de discretização, que não passem pela aplicação da definição da transformada z , tentando assim obter funções de transferência, que permitam prever a reacção do sistema a diversas entradas. Este trabalho faz precisamente o estudo de alguns desses métodos.

2.3 - MAPEAMENTO ENTRE O PLANO s E O PLANO z

Uma ferramenta muito utilizada no projecto e análise de sistemas de controlo, é o Lugar Geométrico de Raízes (LGR). Este método gráfico, permite ter uma visualização, das possíveis localizações dos pólos em malha fechada do sistema. Essa localização será função da localização dos pólos e zeros em malha aberta e de um ganho (k) ajustável.

É sabido que um sistema contínuo, que possua pólos em malha fechada no semi-plano direito do plano s , terá um comportamento instável. Por este facto, a visualização das possíveis localizações desses pólos fornece uma informação muito útil e de fácil leitura sobre a estabilidade do sistema.

Além da informação sobre estabilidade, outras leituras se podem fazer do LGR. Saber a posição dos pólos em malha fechada, permite, nalguns casos, calcular algumas características da resposta temporal ao degrau unitário do sistema, como sejam o overshoot, a frequência de oscilação, o tempo de estabilização, etc.

O grande uso que esta ferramenta tem no estudo de sistemas no domínio contínuo, fez com que a sua utilização fosse transportada para o domínio discreto, com algumas adaptações que passamos a explicar.

Em termos de planos complexos s e z com ordenadas correspondentes à parte imaginária e abcissas correspondentes à parte real, podemos facilmente constatar que se um valor de:

$$s = a + jb \quad (2.4)$$

corresponde a um determinado ponto nesse plano, o número:

$$z = e^{Ts} = e^{(a+jb)t} = x + jy \quad (2.5)$$

irá representar um ponto diferente.

Será esta relação, que não é mais do a definição de z , que foi apresentada anteriormente neste capítulo, que define o mapeamento entre os planos complexos s e z . Com este mapeamento podemos atribuir a cada ponto do plano s , um ponto correspondente no plano z .

Uma propriedade importante a considerar no estudo deste mapeamento, é o facto $z = e^{Ts}$ ser uma função periódica, com período igual a jw_s , em que w_s é a frequência de amostragem. Como $w_s = 2\pi f_s$ e $f_s = \frac{1}{T}$, temos que o período da função e^{Ts} é dado por $j\frac{2\pi}{T}$.

Este facto faz com que um número infinito de pontos do plano s , tenha a mesma representação no plano z . Com efeito, todos os pontos cuja diferença entre si seja de um valor múltiplo do período da função, vão possuir a mesma correspondência no plano z :

$$s_1 = a + jb \quad (2.6)$$

$$s_2 = s_1 \pm jk\frac{2\pi}{T}, \text{ k inteiro} \quad (2.7)$$

$$z_1 = e^{Ts_1} = z_2 = e^{Ts_2} \quad (2.8)$$

Através desta função, fazendo um mapeamento exaustivo ponto a ponto, ou mapeando zonas, como sejam rectas ou semi-rectas paralelas aos eixos, pode obter-se uma correspondência entre áreas do plano s e do plano z . Consegue-se desta forma, obter a zona do plano z que corresponde ao semi-plano esquerdo no plano s .

Relembremos a importância do semi-plano esquerdo, já que, se os pólos da função de transferência em malha fechada se localizarem todos neste plano, temos a garantia de que o sistema será estável. No extremo, os pólos poderão localizar-se, na fronteira entre os dois semi-planos esquerdo e direito, ou seja sobre o eixo das ordenadas, que no caso de um plano complexo, como se sabe, corresponde ao eixo imaginário. Neste caso, o sistema apresentará oscilações de amplitude constante, não caindo contudo na instabilidade.

Debrucemo-nos então sobre o mapeamento do eixo imaginário. Neste caso, o valor de s terá sempre a parte real nula, pelo que a sua transformação será sempre dada por:

$$z = e^{jT\omega} \quad (2.9)$$

em que w representa a parte imaginária do ponto a ser transformado. Este número z é um número complexo cujo módulo será sempre unitário. Vejamos a representação de um número complexo na figura. Se o módulo do ponto x for 1, como acontece no exemplo da figura, a representação desse número será precisamente da forma $x = e^{j\alpha}$. Então, na fórmula $z = e^{j\omega}$, w equivale ao ângulo do vector que representa o número z . É óbvio constatar que se começarmos com $w = 0$, z corresponderá ao número $1 + j0$, enquanto que $w = \frac{\pi}{2}$, corresponde ao número $z = 0 + j1$. Este raciocínio depressa nos leva a verificar que se w variar continuamente entre 0 e 2π , se obtém valores de z que correspondem à circunferência unitária centrada na origem.

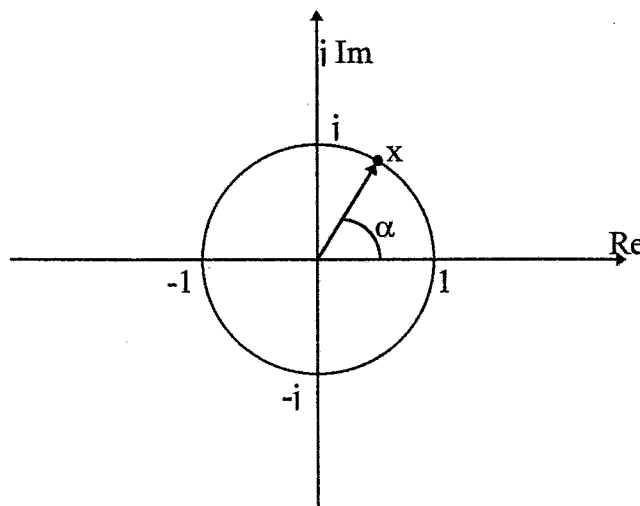


figura 2.2 - representação gráfica do número complexo $x = e^{j\alpha}$

A reflexão anterior sobre a periodicidade da função e^{Ts} , pode ser relembada aqui, para verificarmos que para valores de w maiores que 2π , se repetirão pontos no plano z , já anteriormente representados. Também é trivial verificar, que os pontos correspondentes a valores negativos de w , implicam apenas a consideração de um ângulo α negativo.

Deste modo, temos mais uma vez a repetição de pontos da circunferência unitária.

O eixo imaginário do plano s , é então mapeado na circunferência unitária no plano z .

Estudemos agora, o mapeamento de uma recta paralela ao eixo imaginário, que cruze o eixo real na abscissa $-\sigma$, $\sigma > 0$. Este caso tem uma análise muito semelhante à efectuada para o eixo imaginário. Reparemos que todos os pontos desta recta têm a mesma parte real. Assim fica:

$$s = -\sigma \pm jw, \quad -\infty < w < \infty \quad (2.10)$$

$$z = e^{T(-\sigma \pm jw)} = e^{-T\sigma} e^{\pm jTw} \quad (2.11)$$

Com a variação de w , iremos obter, à semelhança do que sucedeu com o eixo imaginário, pontos de uma circunferência centrada na origem. A diferença entre o mapeamento do eixo imaginário e uma recta que lhe seja paralela, pertencente ao semi-plano esquerdo, reside no valor do raio da circunferência, em que essa recta é transformada. No primeiro caso, como vimos, esse raio é 1, no segundo caso, esse raio será dado por $e^{-T\sigma}$, valor que é sempre inferior à unidade.

Considerando agora rectas, como a anterior, mas com σ a variar entre 0 e $-\infty$, verificamos que essas rectas vão sendo transformadas em circunferências de raio cada vez menor, até que no limite, temos uma recta mapeada na origem do plano z .

Temos agora dados que permitem verificar que o semi-plano esquerdo e eixo imaginário, do plano s produzem uma imagem no plano z que corresponde à circunferência unitária e ao círculo unitário centrados na origem, respectivamente.

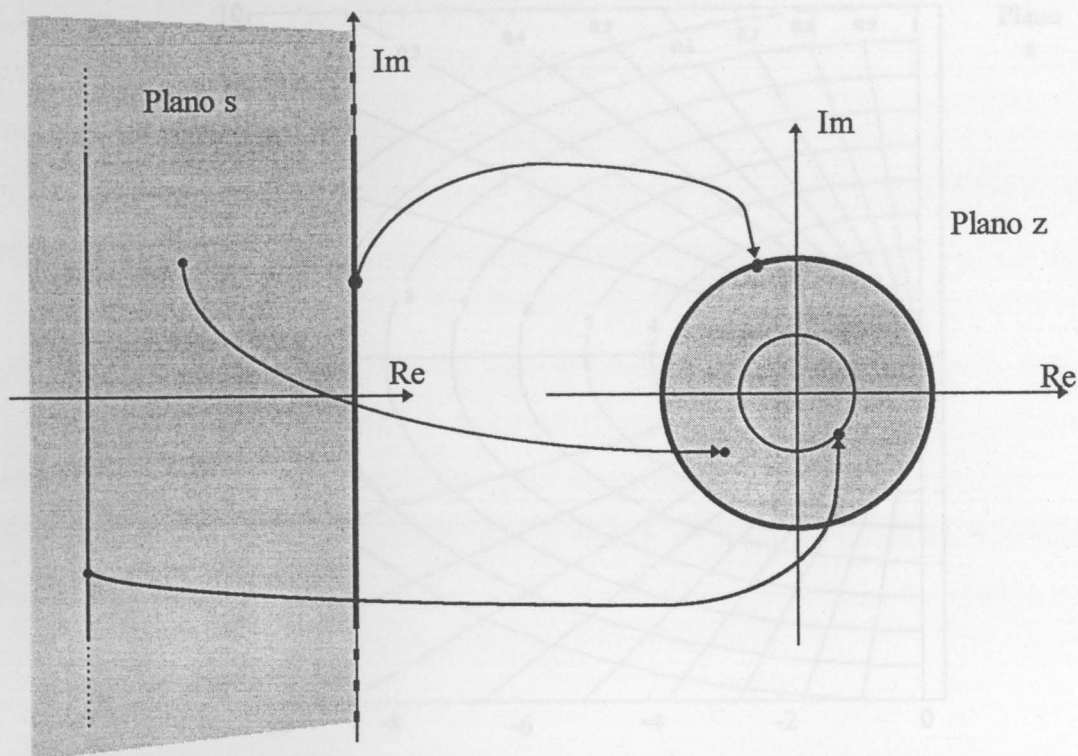


figura 2.3 - mapeamento entre os planos s e z

Possuímos agora informação, que possibilita utilizar as regras do LGR contínuo no domínio discreto. Se, na análise de um sistema discreto, ocorrerem pólos da função em transferência em malha fechada, fora da circunferência unitária, isso corresponderá no plano s a pólos no semi-plano direito, logo, pólos instáveis. Esta informação, como se disse quando do LGR contínuo, é de grande importância na análise de qualquer sistema de controle.

Referimos também que, da localização dos pólos em malha fechada, se podem retirar certas informações sobre a resposta temporal ao degrau unitário do sistema. No plano z , também é possível obter informações deste tipo. Para ler estas informações, geralmente são marcadas no plano, linhas auxiliares, que correspondem a lugares de valores constantes do coeficiente de amortecimento ξ e da frequência natural de oscilação ω_n . Na figura seguinte, apresentamos algumas dessas linhas marcadas, no plano s e no plano z .

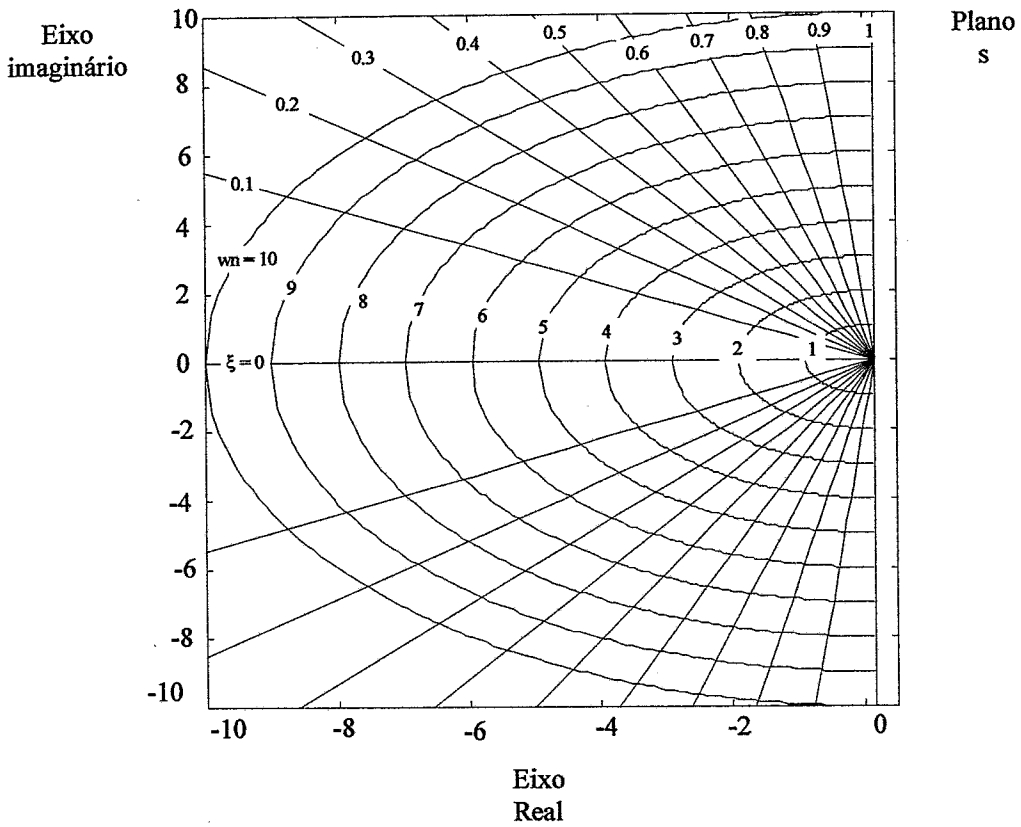


figura 2.4 - zonas de amortecimento e frequência natural constante no plano s

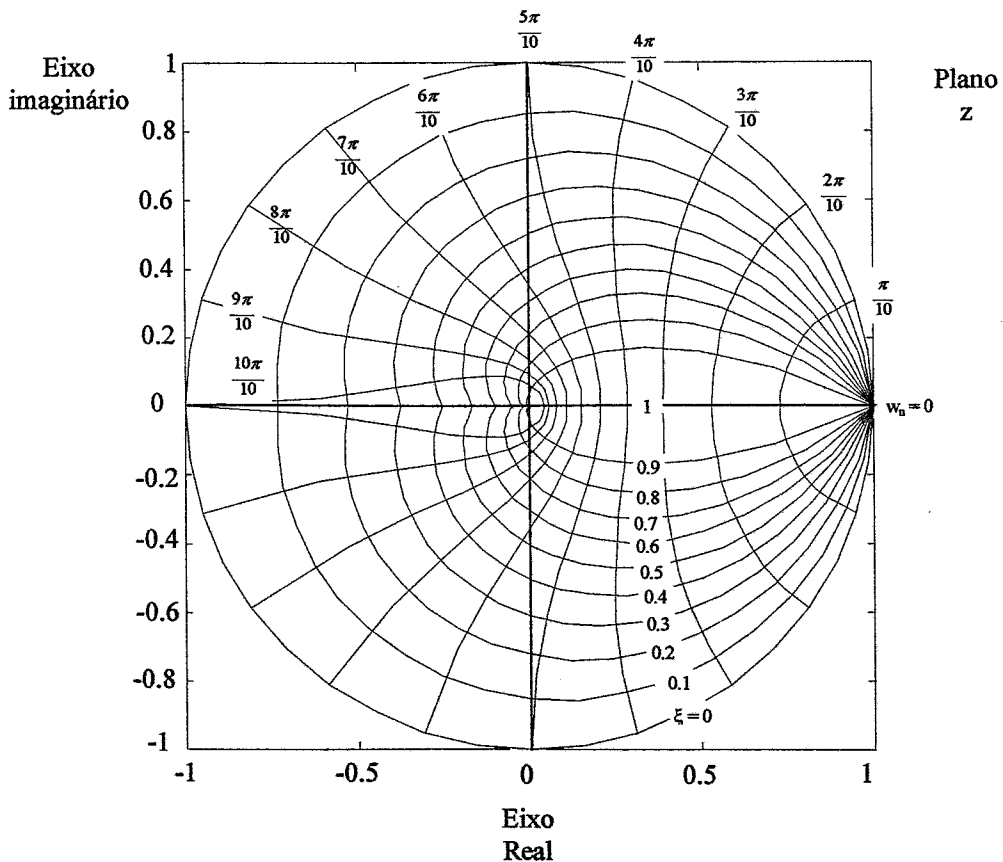


figura 2.5 - zonas de amortecimento e frequência natural constante no plano z

2.4- PROJECTO DE SISTEMAS NO DOMÍNIO DISCRETO VERSUS DISCRETIZAÇÃO DE SISTEMAS CONTÍNUOS

No projecto de sistemas de controlo, em que cada vez mais o projectista tende a utilizar técnicas de controlo digitais, coloca-se por vezes um problema que tem a ver com a dificuldade de efectuar o projecto directamente no domínio digital. De facto, como já foi referido, a análise matemática destes sistemas pode ser bastante complicada, enquanto que no domínio contínuo, não só o projecto se torna mais simples matematicamente, como o conjunto de ferramentas de apoio ao projecto é mais vasto. Acresce a estas vantagens, o facto de ser mais intuitivo trabalhar no domínio contínuo. No domínio discreto, são menos evidentes, ou menos apreendidas pelo projectista, as relações entre a representação matemática e a realidade física.

É assim comum, que o projecto seja realizado no domínio contínuo e posteriormente discretizado utilizando algum processo para o efeito, apesar de cada vez mais surgirem técnicas de projecto directamente no domínio digital.

Cabe aqui referir, que o projecto de um sistema de controlo, consiste na maioria dos casos na escolha do controlador e posterior calibração, uma vez que as outras componentes do sistema são na sua maioria impostas. De facto a planta e outras componentes dum sistema de controlo genérico, existem à priori e apesar de poderem ser ligeiramente modificadas para se adaptarem melhor ao desempenho pretendido, a sua representação não pode ser alterada substancialmente. De notar também que a planta é quase sempre um sistema que funciona no domínio contínuo e não no domínio discreto. Este é mais um factor a pesar, no facto de o desenvolvimento dos controladores ser efectuado no domínio contínuo e só posteriormente se proceder à sua discretização.

Também quando falamos em discretização de um sistema, referimo-nos quase sempre, e de acordo com o referido acima, à discretização somente do controlador, uma vez que as outras partes constituintes do sistema não interessa na maioria das vezes discretizar, porque serão sempre utilizadas no domínio contínuo. A discretização da planta, é realizada por vezes quando se pretende efectuar simulações por computador antes da implementação efectiva do sistema real. Neste caso, e apesar de existirem programas de simulação que permitem o estudo de sistemas híbridos, ou seja que contenham simultaneamente blocos no domínio discreto e blocos no domínio contínuo, pode ser

vantajoso ou mesmo necessário efectuar a simulação com a representação discretizada da planta.

No nosso estudo, só irá ser realizada a discretização do controlador e para isso serão estudados diversas formas de a efectuar.

A discretização de um controlador visa, como é óbvio e como vem sendo referido, obter uma representação discreta do mesmo. Pretende-se que o controlador discretizado, realize as mesmas funções que o controlador contínuo, preferencialmente com o mesmo desempenho que o primeiro obtinha. De notar que um controlador discretizado pode manter o controlo efectivo da planta mas com um desempenho pior, ou seja, com tempos de estabilização maiores, "overshoot" mais elevado, existência de oscilações que não aconteciam com o controlador contínuo, etc., etc.

Como é referido anteriormente, na comparação das vantagens e desvantagens de controladores discretos relativamente aos contínuos, pode mesmo acontecer que um controlador que produzia um desempenho estável enquanto contínuo, perca essa característica tornando o sistema instável se for "mal discretizado". Este conceito de "mal discretizado", não existe em termos absolutos. De facto ele só pode ser aferido realizando testes que permitam comparar o desempenho do sistema antes e depois da discretização. Este será um estudo realizado mais tarde neste trabalho.

2.5 - "ALIASING" OU "FOLDING"

Um importante problema pode surgir, quando se projecta um controlador digital, quer no domínio discreto, quer através da discretização de um controlador contínuo. Esse problema tem a ver com o facto de um sistema amostrado um espectro que se repete em torno de frequências múltiplas da frequência de amostragem.

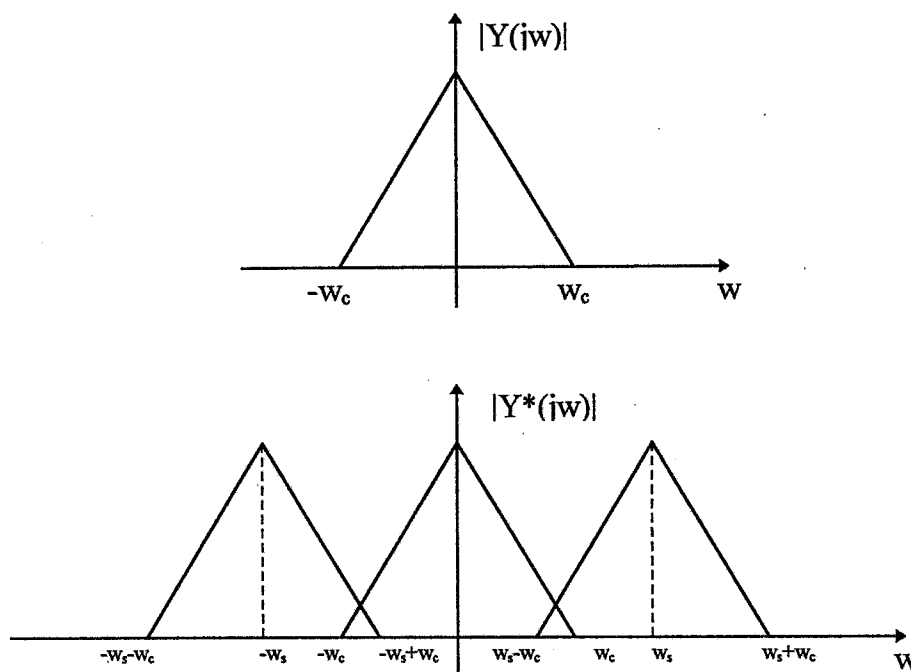


figura 2.6 - espectro com "aliasing"

A figura mostra o espectro de frequência de um sinal genérico $y(t)$. Admitindo que a frequência máxima desse sinal é w_c , vemos no gráfico de cima, o espectro do sinal contínuo. Se esse sinal for amostrado à frequência w_s , teremos no gráfico de baixo, o espectro do sinal amostrado. Mostramos apenas o espectro repetido às frequências w_s e $-w_s$. Ele repete-se no entanto, para todos os múltiplos inteiros destas frequências. De notar que se a frequência w_s for suficientemente elevada, não se verifica o cruzamento dos espectros repetidos, como se mostra na figura.

Este fenómeno, conhecido como "aliasing" ou "folding" provoca problemas efectivos de controlo. O ruído de alta frequência, pouca influência terá no desempenho de um sistema contínuo uma vez que o seu espectro é de tal forma que essas frequências ficam bastante atenuadas. Se esse sinal for amostrado, o ruído que surja a frequências elevadas pode afectar seriamente o desempenho do controlador, se essa frequência produzir um "alias" a baixa frequência.

2.6 - O TEOREMA DE SHANNON E A FREQUÊNCIA DE NYQUIST

Desde o início do uso de sistemas de controlo discretos, que desenvolvimentos teóricos

importantes têm acompanhado a sua implementação prática. Desde o começo que existiu a preocupação de compreender o processo de amostragem e posterior reconstrução do sinal amostrado através do ZOH¹ ou de outro elemento com funções idênticas. Nyquist apresenta pela primeira vez em 1928, um artigo² em que refere que um sinal sinusoidal pode ser completamente reconstruído a partir de impulsos que correspondam a uma amostragem dele próprio, se esse impulsos forem obtidos a uma taxa de pelo menos dois por período. Isto corresponde, como é óbvio, a uma frequência de amostragem, no mínimo o dobro da frequência do sinal sinusoidal.

Em 1949, Shannon apresenta o seu famoso teorema³. Neste teorema, Shannon afirma que qualquer sinal $e(t)$ que não contenha frequências maiores que w_c rads⁻¹, ou por outras palavras, que tenha um espectro limitado, do género do que se mostra na figura, pode ser reconstruído a partir de amostras suas, desde que essas amostras estejam espaçadas de um intervalo T , de forma a que:

$$T < \frac{\pi}{w_c} \text{ s} \quad (2.12)$$

É óbvio constatar do gráfico da figura 2.7, que esta condição, que é equivalente a $w_s > 2w_c$, significa não deixar que os espectros repetidos do sinal original se sobreponham.

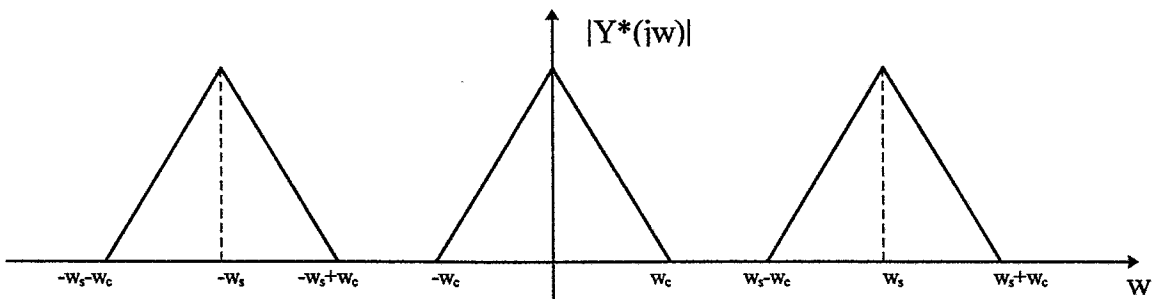


figura 2.7 - espectro sem "aliasing"

Espectro de um sinal amostrado com um valor de w_s que satisfaz o teorema de Shannon

¹ Zero Order Hold ou Retentor de Ordem Zero, que será introduzido e explicado mais à frente

² Nyquist, H. "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory", AIEE Trans., 47, 617-44.

Esta referência aparece citada em [1], pp 33

³ Shannon C. E. "Communications in the Presence of Noise", Proc. IRE, 37, 10-21.

Ver também [1], pp 33

Em termos práticos, esta condição é por vezes muito difícil de verificar, ou porque o espectro do sinal não é limitado, ou porque, embora o sendo, isso acontece a frequências muito elevadas. Isso implicará a utilização de uma frequência de amostragem bastante alta, muitas vezes impossível de implementar em sistemas reais.

Reparemos que a inequação indicada acima, pode ser posta da seguinte forma:

$$w_c < \frac{\pi}{T} \quad (2.13)$$

Corresponde esta inequação, a dizer que a reconstrução de um sinal é possível, desde que

a máxima frequência do espectro desse sinal seja $\frac{\pi}{T}$, em que T é o período de amostragem. Esta frequência é conhecida como frequência de Nyquist e constitui um factor chave na análise e estudo de qualquer sistema amostrado. Com efeito, se num sistema discreto, a frequência de amostragem for inferior à de Nyquist, existirá o risco de ocorrer um fenómeno de “aliasing”, que poderá comprometer a qualidade do desempenho desse sistema.

É possível condicionar um sinal por meio de filtragens apropriadas, de forma a limitar a sua largura de banda, para que se eliminem frequências superiores à frequência de Nyquist. Não nos iremos debruçar sobre este assunto por não cair no objecto do nosso estudo. Apesar disso, a aplicação de uma correcta filtragem pode não só melhorar o desempenho de um sistema de controlo, como até em casos extremos, viabilizar um controlo que sem essa filtragem se torna inviável.

Poderemos dizer algo, sobre a escolha da frequência de amostragem a utilizar num sistema discreto. Middleton e Goodwin [32]¹, aconselham como limites inferior e superior, para a frequência de amostragem, respectivamente, 10 e 50 vezes a largura de banda pretendida para o sistema em malha fechada. Uma frequência de amostragem fora destes limites, pode provocar oscilações indesejáveis entre amostragens, se a frequência

¹ Apesar de ser um livro, esta referência é colocada em último lugar da bibliografia. Isto tem a ver com o facto de ter sido introduzida perto do final do trabalho quando todas as referências aos outros livros e

for muito baixa, e problemas de precisão numérica na implementação em computador, se for muito elevada.

2.7 - O RETENTOR DE ORDEM 0

Num sistema de controlo, é necessário representar a relação entre os sinais de entrada e de saída. Num sistema contínuo, isso representa-se pela função de transferência contínua que não é mais do que a relação entre as transformadas de Laplace dos sinais de entrada e saída. Também num sistema discreto essa relação existe, e pode ser calculada, representando-se neste caso pela função de transferência discreta. Similarmente ao sistema contínuo, essa função de transferência não será mais do que a relação entre as transformadas Z do sinal de saída e do sinal de entrada

Considere-se a representação típica de um sistema dinâmico discreto, no que diz respeito só à planta. O sinal de controlo discreto $e^*(t)$, é transformado num sinal contínuo, por intermédio de um conversor D/A, representado no esquema pelo retentor de ordem zero

“ZOH”¹. Neste caso, a função de transferência discreta $H(z)$ será dada por $\frac{Z(y(t))}{Z(e(t))}$, e

deverá ter em conta o facto de que os sinais de controlo antes de chegarem à planta passam pelo retentor que afecta esse sinais. De facto a função de transferência do

ZOH(s) é dada por $\frac{1 - e^{-Ts}}{s}$.

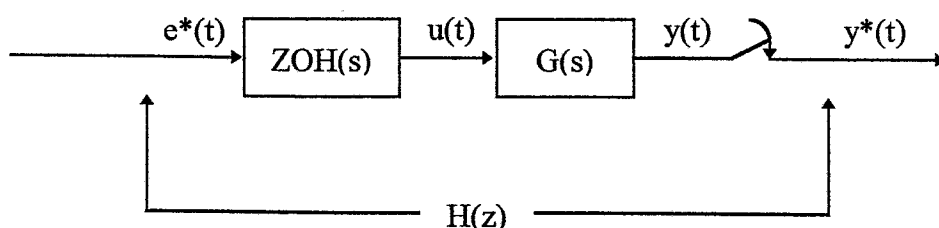


figura 2.8 - representação genérica de um sistema discretizado

O ZOH(s) transforma os impulsos discretos existentes na sua entrada num sinal contínuo por patamares $u(t)$, que é o sinal que efectivamente actua a planta. Podemos ver estes

artigos, já tinham sido feitas..

sinais na figura seguinte.

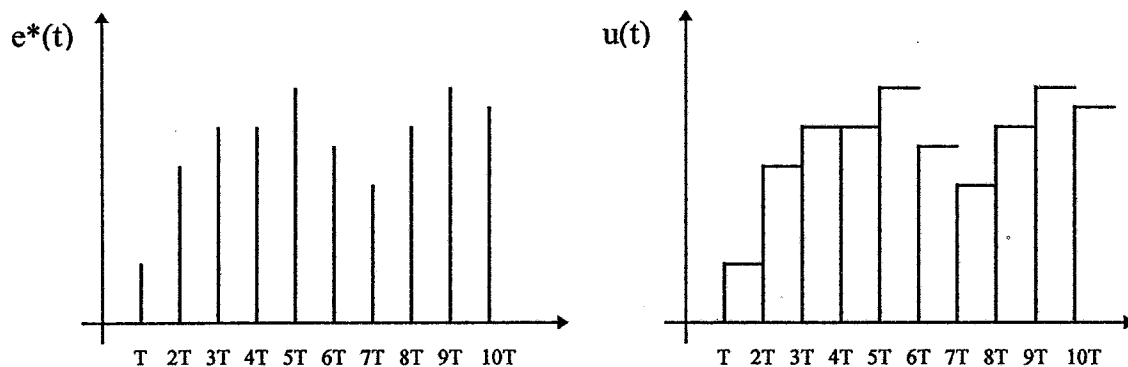


figura 2.9 - efeito do ZOH sobre o sinal $e^*(t)$

Se considerarmos uma entrada em degrau unitário $e(t)$, é fácil observar que $e^*(t)$ não será mais do que uma série de impulsos espaçados de T e de valor unitário. Sendo assim, à saída do ZOH teremos novamente um degrau unitário ($u(t)$) cuja transformada de

Laplace é $\frac{1}{s}$. Desta forma, podemos afirmar que $Y(s) = \frac{G(s)}{s}$. Admitindo que $Y(s)$ tem

como transformada Z $Y(z)$, que não é mais que a transformada Z do sinal $y(t)$, e sabendo que a transformada Z de uma série de impulsos unitários a que corresponde o sinal $e^*(t)$

é $E(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$, podemos definir $H(z)$ como sendo $\frac{Y(z)}{\frac{1}{1-z^{-1}}}$, ou ainda:

$$H(z) = (1-z^{-1})Y(z). \quad (2.14)$$

Resumindo, se um sistema for do tipo representado na figura anterior e se soubermos $G(s)$, a função de transferência $H(z)$ pode ser calculada da seguinte forma:

- 1 - Calcular a transformada Z de $Y(s) = \frac{G(s)}{s}$, obtendo $Y(z)$
- 2 - Multiplicar o resultado anterior por $(1-z^{-1})$ para obter finalmente $H(z) = (1-z^{-1})Y(z)$

Este resultado pode ser obtido duma outra forma, considerando que a função de transferência do ZOH(s) é dada pela fórmula já indicada acima e que repetimos:

¹ "Zero Order Hold"

$$\text{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (2.15)$$

Facilmente se verifica que a série de funções $\text{ZOH}(s)G(s)$ pode ser escrita como:

$$\text{ZOH}(s)G(s) = (1 - e^{-Ts}) \frac{G(s)}{s} \quad (2.16)$$

Assim, a transformada Z deste bloco será dada por $Z\{(1 - e^{-Ts}) \frac{G(s)}{s}\}$ que pode ser calculada como a subtração das transformadas $Z\{\frac{G(s)}{s}\}$ e $Z\{e^{-Ts} \frac{G(s)}{s}\}$. O segundo destes termos não é mais do que o mesmo sinal do primeiro termo, atrasado de T . Em termos de transformada Z isso corresponde a ter $z^{-1}Z\{\frac{G(s)}{s}\}$. Ficamos assim com $H(z)$ dado por:

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z\{\frac{G(s)}{s}\} \quad (2.17)$$

Esta não é mais que a repetição da mesma transformada $H(z)$ calculada atrás.

È possível utilizar em vez de um retentor de ordem 0, para a reconstrução do sinal a partir da série de impulsos, um retentor de ordem 1 (FOH¹), ou mesmo de ordem mais elevada.

$$\text{FOH}(s) = \frac{(1 - e^{-sT})(sT + 1)}{s^2T} \quad (2.18)$$

Função de transferência do retentor de ordem 1

¹ "First Order Hold

Neste caso a saída seria, não uma sucessão de patamares, mas cada impulso seria transformado numa rampa. Este processo é relativamente pouco utilizado pelo que não o iremos apresentar nem discutir.

2.8 - DISCRETIZAÇÃO DE CONTROLADORES

O método de discretização, baseado no retentor de ordem zero, que acabamos de apresentar, é um método exacto, quando a entrada do sistema é um degrau unitário. Normalmente esta suposição é válida, quando se pretende descrever a saída da planta com controlo digital, nos instantes de amostragem, pois quase todos os conversores A/D, funcionam como um retentor de ordem zero, mantendo o sinal de entrada na planta, constante entre instantes de amostragem. Se for aplicado à discretização de controladores, esta suposição não é válida, porque o sinal de entrada no controlador, não se mantém constante entre instantes de amostragem. Nos próximos capítulos iremos descrever alguns métodos para discretizar controladores. Estes, podem ser divididos em dois grandes grupos. No primeiro desses grupos, que se denomina de malha aberta, a discretização é efectuada, transformando $G(s)$ em $G(z)$. Esta transformação é feita por substituição dos termos em s por termos em z , por forma a satisfazer algum critério. Este pode ser obter um determinado mapeamento entre o plano ss e o plano zz , obter uma resposta semelhante do controlador discretizado relativamente ao controlador contínuo nos instantes de amostragem, etc.. Em termos gerais, nestes métodos não é utilizada informação relativa às características de funcionamento do sistema em malha fechada. De facto, somente a função de transferência do controlador é necessária.

A discretização baseada no elemento retentor de ordem zero, que foi apresentada na secção anterior, pode incluir-se neste conjunto de métodos de discretização em malha aberta. Com efeito, não são necessárias quaisquer informações sobre outras características do sistema, nem sobre a planta que o controlador actua.

Nos métodos de malha fechada, a abordagem é diferente. Neste conjunto de métodos, o procedimento adoptado implica que quase sempre que se tentem manter intactas, ou pelo menos o mais possível inalteradas, as características que o sistema analógico possuía em malha fechada.

CAPÍTULO 3

MÉTODOS EM MALHA ABERTA

3 - Métodos em Malha Aberta (Open Loop)

3.1 - INTRODUÇÃO

Nos métodos em malha aberta, o processo utilizado na discretização consiste em substituir o termo s , na função $G(s)$, por um novo termo em z . Obtém-se assim $G(z)$, que se considera como a discretização de $G(s)$.

Como se processa então a substituição do factor s ? Nos métodos clássicos, essa substituição é obtida, ou através de aproximações à relação exacta entre s e z , que relembremos é representada por $z = e^{sT}$,¹ ou através de aproximações que levam em conta o facto de s representar a diferenciação em ordem ao tempo e $\frac{1}{s}$ representar a integração². Estes métodos são muito simples de aplicar, apesar de por vezes, quando aplicados a sistemas mais complexos, poderem comprometer o desempenho do sistema discretizado.

Alguns métodos, têm geralmente como base aqueles acabados de referir, diferindo apenas no grau de aproximação aplicado³, ou na utilização de algum melhoramento posterior.

Existem também métodos que efectuam uma partição de $G(s)$ em elementos mais simples $G_i(s)$, realizando a sua transformação em elementos discretos equivalentes $G_i(z)$, que compõem no seu conjunto a função $G(z)$.

De referir que todos estes métodos, têm como parâmetro ajustável o período de amostragem. Isto implica, que o controlador final pode ser encontrado, depois de se testar vários períodos de amostragem, seleccionando-se o maior que conduz a um

¹ T = período de amostragem

² Lembremos que $Y(s) = sF(s)$, corresponde a ter no domínio dos tempos $y(t) = \frac{df(t)}{dt}$ e que

$$X(s) = \frac{F(s)}{s} \text{ corresponde a } x(t) = \int f(t)dt$$

³ Por exemplo, se a relação $z = e^{sT}$ for aproximado por uma série, essa série pode ser truncada de formas diferentes, produzindo aproximações mais ou menos exactas, relativamente à a relação inicial. É óbvio que quanto mais aproximada for a relação, maior a complexidade e a dificuldade na aplicação do

melhor desempenho.

Iremos apresentar agora alguns destes métodos, sem no entanto mostrar quaisquer resultados de discretizações efectuadas com os mesmos. Isso será efectuado no capítulo 6.

3.2 - MÉTODO DE EULER

Este método (também conhecido na literatura como "forward difference" devido à aproximação à derivada que é efectuada) corresponde a aproximar o mapeamento exacto entre z e s por uma expansão em série truncada, ou seja:

$$z = e^{sT} \approx 1 + sT \quad (3.1)$$

Manipulando a expressão, temos que:

$$s = \frac{z-1}{T} \quad (3.2)$$

Esta vai ser a fórmula utilizada para efectuar a substituição dos termos em s de $G(s)$.

Esta aproximação pode também ser obtida, se pensarmos que a derivada representada no sistema analógico por s (correspondendo a $\frac{dx(t)}{dt}$) pode ser aproximada por uma equação às diferenças da seguinte forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-h)}{T} = \frac{z-1}{T} x(t)^1 \quad (3.3)$$

Daqui se retira também, a igualdade já apresentada acima:

$$s = \frac{z-1}{T} \quad (3.4)$$

método.

¹ Utiliza-se aqui a propriedade de operador avanço da variável z , que corresponde a ter $zx(t) = x(t+1)$.

A simplicidade deste método contrasta com a possibilidade que o mesmo introduz, de transformar um sistema contínuo estável num sistema discreto instável. Vejamos o mapeamento que a mesma produz entre o plano s e o plano z :

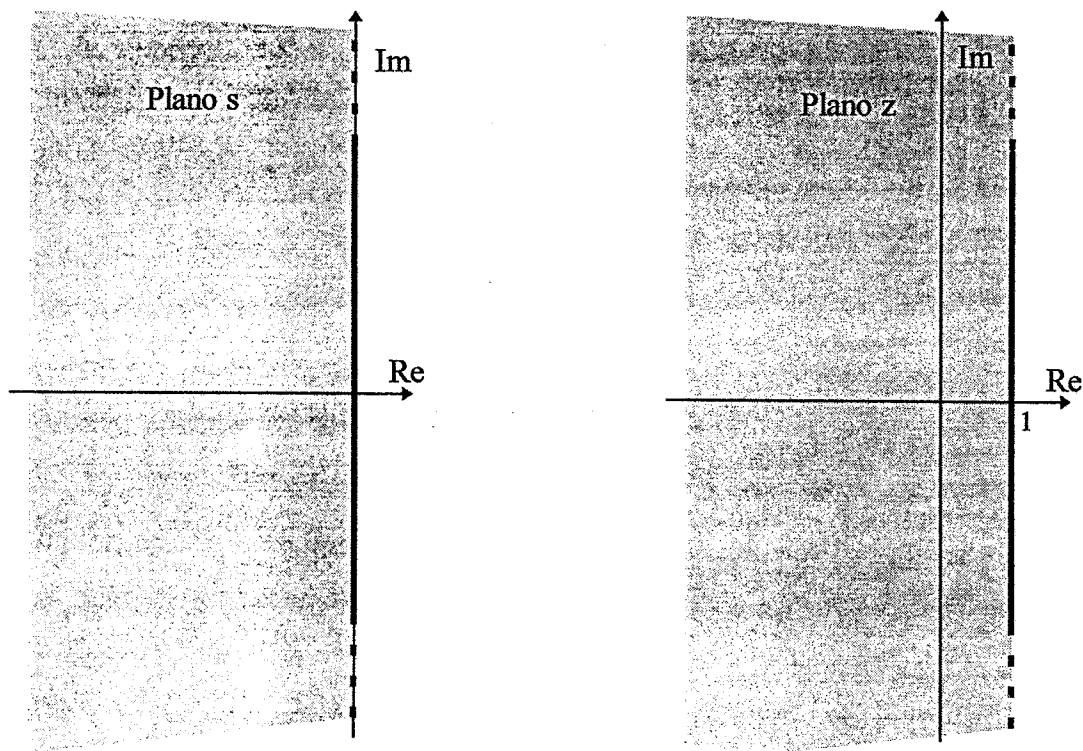


figura 3.1 - mapeamento entre os planos s e z devido à transformação de Euler

De facto, comparando este mapeamento com aquele produzido pela transformação exacta $z = e^{sT}$, apresentado no capítulo anterior, vemos que a zona de estabilidade do plano s , não se transforma na zona de estabilidade do plano z , que corresponde ao círculo unitário centrado na origem. Este factor, conjugado com os fracos desempenhos que o sistema pode apresentar depois de discretizado, faz com que este método, apesar de muito simples, não seja comumente utilizado.

3.3 - MÉTODO DIFERENCIAL

Este processo conhecido por "backward difference" (por contraste com a designação

"forward difference" do método anterior) é, na definição, muito similar ao de Euler¹ diferindo no facto de a aproximação da derivada pela equação às diferenças, tomar aqui a seguinte forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-h)}{T} = \frac{1-z^{-1}}{T} x(t) = \frac{z-1}{zT} x(t)^2 \quad (3.5)$$

Da mesma forma que no método de Euler, a sua aplicação prática corresponde a substituir s na função $G(s)$ por:

$$s = \frac{z-1}{zT} \quad (3.6)$$

A aparente proximidade deste método com o de Euler só é válida do ponto de vista de como é obtido. Assim, analisemos o mapeamento entre planos realizado por este método, apresentado na figura 3.2.

Neste caso, por contraste com o anterior, temos que um sistema estável, é transformado num sistema também estável. Pode verificar-se que o semi-plano esquerdo do plano s , se transforma, por esta relação, no círculo de raio 0.5, centrado no ponto $[0 \ 0.5]$. Esta região está dentro da região de estabilidade do plano z , pelo que podemos afirmar que se mantém a estabilidade de um sistema depois de discretizado por este método. A estabilidade do sistema discretizado, não é o único aspecto a considerar na análise do resultado da discretização. O facto de que os pólos do sistema contínuo tem a sua imagem discretizada no interior do círculo como se indica na figura, vai condicionar a dinâmica do sistema discreto.

Apesar de tudo, é evidente a vantagem que este método tem sobre o método de Euler no que diz respeito à estabilidade. Quanto ao desempenho, melhor ou pior, relativamente ao método anterior, só caso a caso se poderá verificar, efectuando testes. Não deixa de ser, contudo, um método cujos resultados são, fracos, a não ser que seja aplicado a sistemas

¹ É de facto parecido com a definição a partir da diferenciação, não com a aproximação da relação $z = e^{sT}$.

² Lembrando que $z^{-1}x(t) = x(t-1)$.

simples e com períodos de amostragem reduzidos.

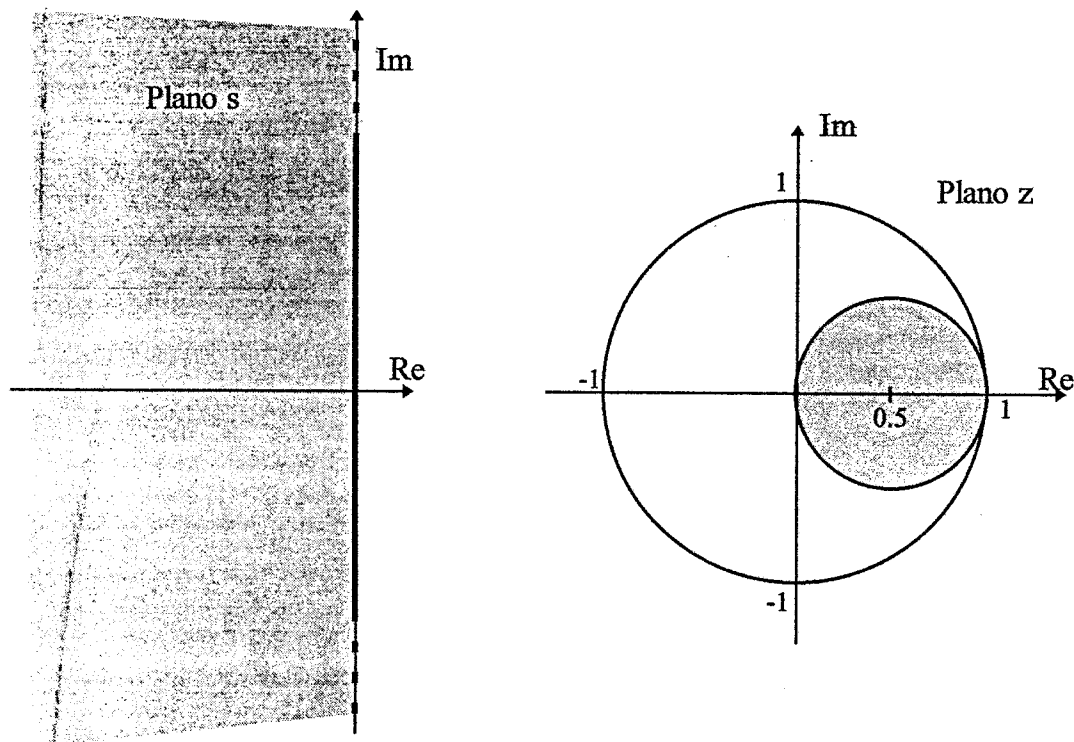


figura 3.2 - mapeamento entre os planos s e z devido à transformação diferencial

3.4 - MÉTODO DE TUSTIN

Este método é largamente divulgado e utilizado, produzindo resultados bastante satisfatórios. Conhecido por transformação de Tustin ou transformação bilinear, baseia-se não na aproximação da derivada representada, por s , mas sim na integração representada pelo factor $\frac{1}{s}$.

Para se chegar à transformação, consideremos, o sistema representado na figura 3.3.

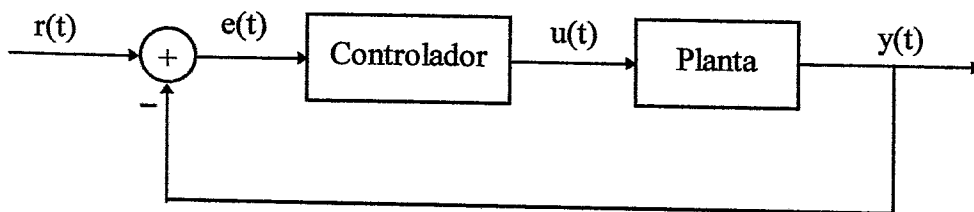


figura 3.3 - sistema analógico

Admitamos que $R(s)$, $E(s)$, $U(s)$, $Y(s)$, são as transformadas de Laplace dos sinais

temporais correspondentes. Chamando $G(s)$ à função de transferência do controlador,

$H(s)$ à função da planta, e impondo $G(s) = \frac{1}{s}$, temos $\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}$.

Nestas condições, analisemos a figura seguinte.

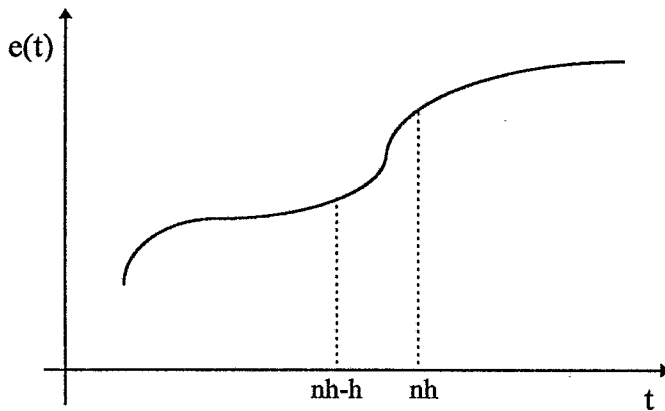


figura 3.4 - sinal $e(t)$

Uma vez que o factor $\frac{1}{s}$ representa uma integração no tempo, podemos afirmar que

$$u(nh) = \int_0^{nh-h} e(t) dt + \int_{nh-h}^{nh} e(t) dt \quad (3.7)$$

que corresponde a afirmar que o valor de $u(t)$ no instante $t = nh$ é igual à área da função $e(t)$ até ao instante $t = (nh-h)$ mais a área entre os instantes $t = (nh-h)$ e $t = nh$:

$$u(nh) = u(nh-h) + (\text{área entre } nh-h) \quad (3.8)$$

Façamos agora uma aproximação do sinal $e(t)$ entre os pontos $t = (nh-h)$ e $t = nh$, por um segmento de recta, como se vê na figura.

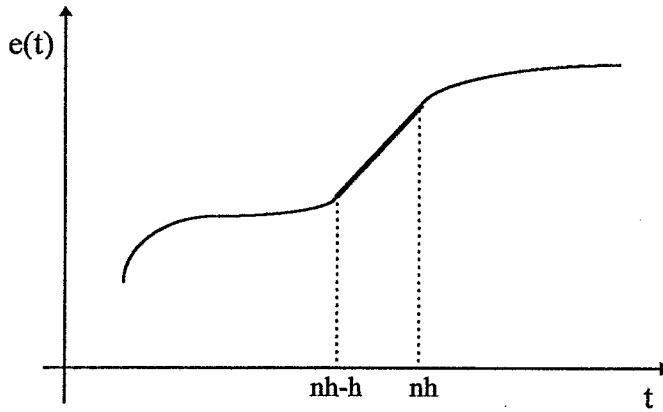


figura 3.5

Se calcularmos novamente o valor de $u(nh)$, considerando a nova área entre os instantes $t = (nh-h)$ e $t = nh$, deste novo sinal $e(t)$ temos que esse valor de u é dado por:

$$u(nh) = u(nh-h) + \frac{h}{2}(e(nh-h) + e(nh)) \quad (3.9)$$

em que o segundo termo da soma corresponde à área do trapézio formado entre $t = (nh-h)$ e $t = nh$.

Se aplicarmos agora a transformada z à equação anterior e lembrando que:

$$\mathcal{Z}\{f(t-kh)\} = z^{-k} F(z), \text{ com } k \text{ inteiro} \quad (3.10)$$

em que h corresponde ao período de amostragem, obtemos:

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{h}{2}(z^{-1}E(z) + E(z)) \quad (3.11)$$

$$U(z)(1-z^{-1}) = \frac{h}{2}(z^{-1} + 1)E(z) \quad (3.12)$$

manipulando a expressão, resulta a relação entre as transformadas z dos sinais $e(t)$ e $u(t)$, que é dada por:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{h z^{-1} + 1}{2(1 - z^{-1})} = \frac{1}{\frac{2(1 - z^{-1})}{h(1 + z^{-1})}} \quad (3.13)$$

Reparemos que no sistema contínuo, a relação exacta entre $u(t)$ e $e(t)$, á dada por:

$$e(t) = \int u(t) dt \quad (3.14)$$

A esta relação, corresponderia a transformada z , se calculada de forma exacta, dada por:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{z}{z - 1} \quad (3.15)$$

A diferença entre as duas expressões, resulta do facto de se ter aproximado o integral entre dois pontos do sinal $e(t)$, por um segmento de recta. Este é aliás um método de integração numérica normalmente utilizado.

Podemos afirmar, no caso do sistema que estamos a considerar, que a relação $\frac{U(z)}{E(z)}$ se

obté, fazendo a substituição na função $G(s) = \frac{1}{s}$ de s por $\frac{2(1 - z^{-1})}{h(1 + z^{-1})}$.

Fazendo a substituição de h por T (período de amostragem), para uniformizar a simbologia com os dois métodos anteriores, temos então que o método de Tustin

corresponde a substituir, em qualquer função genérica $G(s)$, s por $\frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})}$ ou,

multiplicando o numerador e o denominador por z ,

$$s \rightarrow \frac{2(z - 1)}{T(z + 1)} \quad (3.16)$$

A transformação de Tustin tem a propriedade de transformar uma função de transferência contínua estável, numa função discreta também estável. Isto pode constatar-se, analisando o mapeamento do plano s para o plano z que a mesma produz. Com efeito, o semi-plano esquerdo e o eixo imaginário do plano s são transformados,

respectivamente no interior do círculo unitário centrado na origem e na circunferência que delimita esse círculo no plano z . Esta relação entre os planos s e z devida à transformação de Tustin é idêntica aquela que se obtém com o mapeamento exacto entre as variáveis s e z dado por $z = e^{sT}$. Este facto é uma vantagem importante relativamente aos outros métodos já descritos, apesar de o método actual implicar cálculos um pouco mais complexos.

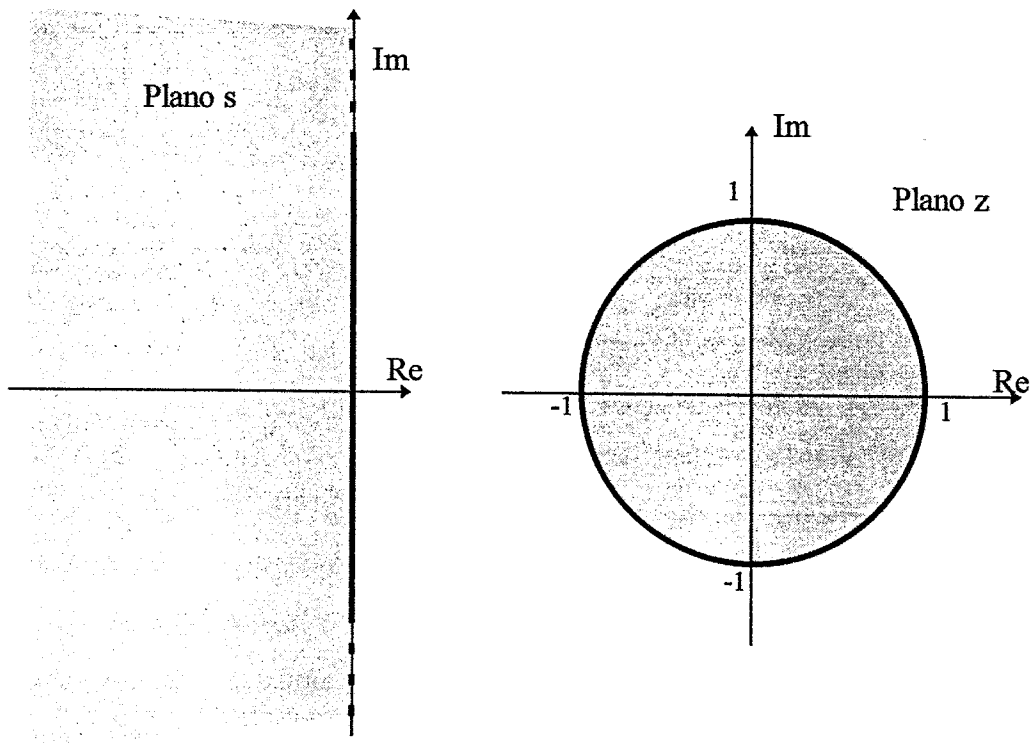


figura 3.6 - mapeamento entre os planos s e z devido à transformação de Tustin

3.5 - MÉTODO DOS ELEMENTOS RETENTORES

Recordemos o processo de discretização apresentado no capítulo anterior, baseado na utilização do retentor de ordem zero (ZOH). Neste método, um elemento $Q(s)$, é colocado em série com a planta que se pretende discretizar, tendo como objectivo, transformar os impulsos discretos à sua entrada ($e^*(t)$) num sinal contínuo na sua saída ($e(t)$).

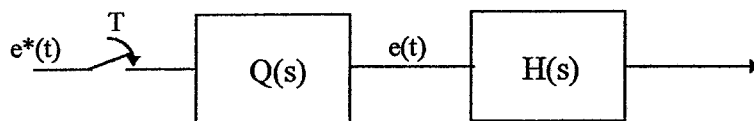


figura 3.7

Foi referido, quando se apresentou o método do ZOH, que outras funções poderiam desempenhar esse papel, nomeadamente retentores de ordem mais elevada.

A utilização de diverso tipo de funções $Q(s)$ que façam uma interpolação entre os impulsos discretos de $e^*(t)$, transformando-os num sinal contínuo $e(t)$, abre campo a toda uma nova sub-ordem de métodos de discretização, que já foi de facto explorada, encontrando-se alguns destes métodos na literatura e em artigos da especialidade [21].

Em sistemas discretizados desta forma, a função de transferência discreta é obtida como se mostra a seguir

$$H(z) = \mathcal{Z}\{Q(s)H(s)\} \quad (3.17)$$

Apesar de dependente do elemento $Q(s)$, há uma característica que quase todos apresentam. Essa característica é impor que, nos instantes de amostragem, o sinal $e(t)$, tenha o mesmo valor que $e^*(t)$ ¹.

O elemento retentor mais utilizado, é sem dúvida o ZOH, representando um interpolador rectangular. Outros retentores diferentes, podem ser utilizados, mas não de uma forma generalizada. Veremos mais à frente um método (Madwed-Truxall), em que este processo é conjugado com outro para obter a discretização de uma função de transferência.

Note-se que o elemento retentor é colocado antes do bloco, em série, com a função de transferência que se pretende discretizar. Esta não é a situação que normalmente surge na discretização de um controlador. De facto, este método é utilizado essencialmente na discretização de plantas e não na discretização de controladores. Na maioria dos métodos, o controlador, actua independentemente da existência do elemento retentor².

¹ Isto acontece quando no sistema real existe um bloco $Q(s)$ antes de $G(s)$

² Apesar disso, existem métodos de discretização que tem em conta o facto de existir o elemento retentor

Se existir a necessidade de efectuar simulações no domínio discreto, o modelo da planta a utilizar na simulação é sempre obtido, através da utilização deste método, com o retentor de ordem apropriada (o retentor representa o conversor A/D). Normalmente, recorre-se ao retentor de ordem zero já apresentado, pois a maioria dos conversores A/D mantém constante a sua saída entre os instantes de amostragem

3.6 - MÉTODO DE BOXER-THALER

Nos três métodos iniciais apresentados neste capítulo, a função $G(z)$ é obtida de $F(s)$ por substituição de s por um termo em z (vamos chamar a este termo A). Em todos estes métodos, se aparecer em $F(s)$ um factor s^q isso implicará, para a obtenção de $G(z)$, a substituição de s^q por A^q . No entanto já foi referido, existem outros métodos em que a substituição de s^q não é feita de acordo com este processo. Iremos agora mostrar alguns destes métodos mas sem especificar nenhum deles muito pormenorizadamente, uma vez que a sua utilização na prática é praticamente inexistente devido ao enorme volume de cálculos envolvidos.

Boxer e Thaler apresentaram um processo, em que partem da relação já conhecida:

$$z = e^{sT} \quad (3.18)$$

Facilmente se deduz desta expressão a seguinte:

$$s = \frac{\ln z}{T}, \text{ ou } \frac{1}{s} = \frac{T}{\ln z} = \Xi(z) \quad (3.19)$$

Chamemos operador integrador a este último elemento

Esta igualdade, pode ainda ser posta na seguinte forma:

$$\Xi(z) = \frac{\frac{T}{2}}{\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2m+1} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{2m+1} \right\}} \quad (3.20)$$

Para obter os operadores integradores de ordem mais elevada, eleva-se os dois lados da equação anterior à potência desejada. Deste processo resultam os seguintes resultados¹ para os termos de ordem 1, 2 e 3

$$\Xi^1(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad (3.21)$$

$$\Xi^2(z) = \frac{T^2}{12} \frac{z^2 + 10z + 1}{(z-1)^2} \quad (3.22)$$

$$\Xi^3(z) = \frac{T^3}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \quad (3.23)$$

O elemento de ordem i , pode ser determinado a partir da seguinte expressão³:

$$\Xi(z)^i = T^i \left\{ \frac{1}{s^i} \right\} + T^i \frac{\mathfrak{B}_i}{i!} \quad (3.24)$$

Sendo \mathfrak{B}_i , o i -ésimo número de Bernoulli.

Repare-se que ao contrário dos métodos anteriores, em que a substituição é efectuada na forma:

$$s^i \rightarrow f(z)^i \quad (3.25)$$

¹ Repare-se na crescente complexidade dos operadores

² Este termo corresponde à transformação de Tustin

³ Podemos verificar a dificuldade de aplicação deste método a funções de ordem elevada, se relembramos

que a transformada z de $\frac{1}{s^i}$ é dada por $\frac{1}{(i-1)!} \lim_{b \rightarrow 0} \left[(-1)^{i-1} \frac{\partial^{i-1} \frac{z}{z - e^{-bT}}}{\partial b^{i-1}} \right]$

neste método, a substituição tem que ser feita da seguinte forma:

$$s^{-i} \rightarrow \Xi(z)^i \quad (3.26)$$

Com efeito, o termo $\Xi(z)$ substitui não s , mas s^{-1} .

Pelos cálculos que envolve, este método não é muito utilizado, nem aparece referenciado em grande parte de literatura existente, ou se aparece é quase sempre a título de curiosidade.

3.7 - MÉTODO DE MADWED-TRUXAL

Madwed e Truxal, desenvolveram um método semelhante ao anterior, alterado na forma como se obtém o operador integrador. Neste caso, o elemento integrador é da forma:

$$\Psi^i(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{Q(s)}{s^i} \right\} \quad (3.27)$$

Recordemos o método dos elementos retentores. Madwed e Truxal, afectam o elemento integrador apresentado por Boxer e Thaler, de um elemento retentor, que efectua uma interpolação entre instantes de amostragem. Se for utilizada uma interpolação linear, resultam os seguintes termos para substituição de s^{-1} , s^{-2} e s^{-3} .¹

$$\Psi^1(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad (3.28)$$

$$\Psi^2(z) = \frac{T^2}{6} \frac{z^2 + 4z + 1}{(z-1)^2} \quad (3.29)$$

$$\Psi^3(z) = \frac{T^3}{24} \frac{z^3 + 11z^2 + 11z + 1}{(z-1)^3} \quad (3.30)$$

Podemos encontrar os elementos de ordem mais elevada, com a seguinte fórmula:

¹ Também aqui os termos são apresentados de forma a que a substituição se faça por s^{-i} e não s^i .

² Como no método anterior, este termo corresponde à transformação de Tustin

$$\Psi^i(z) = T^i \frac{1}{i!} \frac{\mathcal{D}_i(z)}{(z-1)^i} \quad (3.31)$$

$$\mathcal{D}_i(z) = \sum_j^{k-1} a_{k-j}^k z^j \quad (3.32)$$

$$a_j^k = (k+1-j)a_{j-1}^{k-1} + ja_j^{k-1} \quad (3.33)$$

Mais uma vez e similarmente ao método anterior, os cálculos que o presente método exige são muito consideráveis. O volume de cálculo que implicaria a discretização de uma função de, por exemplo, ordem 5 ou 6 mostra que este método não é utilizável, a não ser que as funções a discretizar sejam relativamente simples, ou que se esteja disposto a empreender todos os cálculos necessários.

Uma outra desvantagem apresentam os dois últimos métodos apresentados, é a de terem uma mecanização muito mais difícil.

Como curiosidade, apresentamos a seguir uma tabela, com as substituições a efectuar na discretização de funções, com os cinco métodos apresentados até agora. Só a substituição dos termos s , s^2 e s^3 é apresentada.

tabela 3.1

Método	s	s^2	s^3
Euler	$a = \frac{z-1}{T}$	a^2	a^3
Diferencial	$a = \frac{z-1}{zT}$	a^2	a^3
Tustin	$a = \frac{T z + 1}{2 z - 1}$	a^2	a^3
Boxer Thaler	$a = \frac{T z + 1}{2 z - 1}$	$b = \frac{T^2 z^2 + 10z + 1}{12 (z-1)^2}$	$c = \frac{T^3 z(z+1)}{2 (z-1)^3}$
Madwed- Truxal	$a = \frac{T z + 1}{2 z - 1}$	$b = \frac{T^2 z^2 + 4z + 1}{6 (z-1)^2}$	$c = \frac{T^3 z^3 + 11z^2 + 11z + 1}{24 (z-1)^3}$

3.8 - MÉTODO DA RESPOSTA INVARIANTE

Alguns métodos em malha aberta, tentam aproximar a discretização ideal¹. No caso dos controladores esta discretização ideal, é muito difícil, senão mesmo impossível, por não se conhecer o sinal de entrada que o vai actuar.

Se no entanto, arbitrarmos um sinal de entrada, pode efectivamente fazer-se a discretização de uma função de transferência, por forma a fazer com que a sua resposta a essa mesma entrada, se mantenha igual, sem variar². Claro que a comparação da resposta dos dois sistemas, contínuo e discreto, só pode ser efectuada nos instantes de amostragem. Deste modo, também a igualdade de respostas neste caso, se resume à igualdade nesses instantes. Esse factor, é no entanto suficiente, na maioria dos casos, para garantir um desempenho satisfatório.

Vejamos como se obtém a função discretizada por este método.

Suponhamos uma função de transferência $F(s)$, tal que, para uma entrada $u(t)$, (que possui transformada de Laplace $U(s)$), produz uma saída $y(t)$ (com $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$).

$$Y(s) = F(s)U(s) \quad (3.34)$$

Pretende-se obter uma função $F(z)$, de forma a que:

$$Y(z) = F(z)U(z) \quad (3.35)$$

em que $Y(z)$ e $U(z)$ são, as transformadas z de $y(t)$ e $u(t)$ ³, respectivamente, ou similarmente:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{Y(s)\} \text{ e } U(z) = \mathcal{Z}\{U(s)\} \quad (3.36)$$

¹ Entende-se aqui por discretização ideal, aquela em que a resposta do sistema discreto, coincide exactamente (pelo menos nos instantes de amostragem), com a resposta inicial do sistema contínuo.

² Escusado será dizer que deste facto, se retira o nome para este método

³ Mais propriamente $Y(z)$ e $U(z)$ representam as transformadas z de $y(nt)$ e $u(nt)$, com n inteiro

Das relações anteriores, podemos retirar que:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{Y(s)\}}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{F(s)U(s)\}}{U(z)} \quad (3.37)$$

Especificando para $u(t)$ correspondente a um degrau unitário, sabemos que $U(s) = \frac{1}{s}$ e

que $U(z) = \frac{z}{z-1}$. Podemos então achar $F(z)$ que é dado por:

$$F(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} \quad (3.38)$$

Ao contrário dos métodos anteriores, e à semelhança do método que envolve a consideração do ZOH¹, abordado anteriormente, este processo de discretização, implica a aplicação da transformada z exacta. Pode então perguntar-se, porque não aplicar simplesmente essa transformada à função $F(s)$, determinando $F(z)$ sem mais nada. De facto, isso não garantiria a igualdade das respostas do sistema perante um determinado sinal de entrada, condição que é garantida pela aplicação do método da resposta invariante. É aliás curioso reparar que, a aplicação do método em estudo, com uma entrada $u(t)$ correspondente a um impulso de Dirac produz como resultado, a transformada z exacta da função $F(s)$. Esse facto verifica-se imediatamente, observando que, para um impulso de Dirac, quer a transformada de Laplace como a transformada z são iguais à unidade ($\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{Z}\{\delta(t)\} = 1$).

Admitindo como entrada, um sinal $u(t)$ em rampa, teríamos uma função $F(z)$ dada por:

$$F(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} \mathcal{Z}\left\{\frac{F(s)}{s^2}\right\} \quad (3.39)$$

O método da resposta invariante ao degrau, é sem dúvida o mais utilizado, pela importância que este tipo de entrada tem no desenvolvimento e na aplicação de

¹ Repare-se que este método, quando considerado com uma entrada em degrau, é equivalente ao método do ZOH descrito no ponto 7 do capítulo 2.

controladores.

Efectuando a discretização de uma função $F(s)$, utilizando este método com um sinal específico $u(t)$, poder-se-á perguntar como se comportará o sistema depois de discretizado, se for actuado por um sinal diferente do utilizado na aplicação do método. Esta pergunta só pode ser respondida, obviamente, caso a caso. Pode no entanto dizer-se que a qualidade do desempenho, dependerá da maior ou menor semelhança que o sinal efectivamente utilizado tenha com aquele que se utilizou na aplicação do método da resposta invariante.

A maior dificuldade na aplicação deste método à discretização de controladores, reside no facto de não sabermos exactamente qual vai ser o seu sinal de entrada

O mapeamento entre os plano s e z , neste método é dado pela relação $z = e^{-sT}$. Isto tem a ver com a utilização da transformada z . A especificidade da cada caso impede esse estudo. O facto de que a resposta nos instantes de amostragem, iguala a do sistema contínuo, garante a estabilidade do sistema discreto em malha aberta

Existem algumas tabelas com funções de transferência típicas, calculadas utilizando a resposta invariante ao degrau (a mais vulgarmente usada, como já se disse). Uma destas tabelas apresentada por Neuman e Baradello pode ser encontrada em [11]. Tem como limitação, no entanto, considerar funções no máximo de 3ª ordem. Hoje em dia, com a possibilidade de desenvolver controladores de ordem elevada¹, por se dispor de computadores cada vez mais rápidos, esta limitação começa a ser importante. De referir contudo, que esta tabela data de 1979, altura em que, no mercado dos computadores pessoais se impunha, com enorme êxito, o Spectrum, com a sua arquitectura de 8 bits e memórias que não eram maiores do que 512 Kbytes.

3.9 - MÉTODO DO MAPEAMENTO DE PÓLOS E ZEROS

Este método é de aplicação muito simples. Consiste em substituir os pólos e zeros da função $F(s)$, por pólos e zeros na função $F(z)$ dados pela relação:

¹ De facto, um dos exemplos considerados e utilizados para testar alguns dos processos de discretização apresentados neste trabalho, é um controlador que possui numerador e denominador de ordem 9.

$$(s + p_i) = (1 - z_i z^{-1}) \quad (3.40)$$

$$z_i = e^{-p_i T} \quad (3.41)$$

O mapeamento do plano s para o plano z , é neste método igual ao da transformada z exacta e ao método de Tustin. Relembramos aqui esse mapeamento:

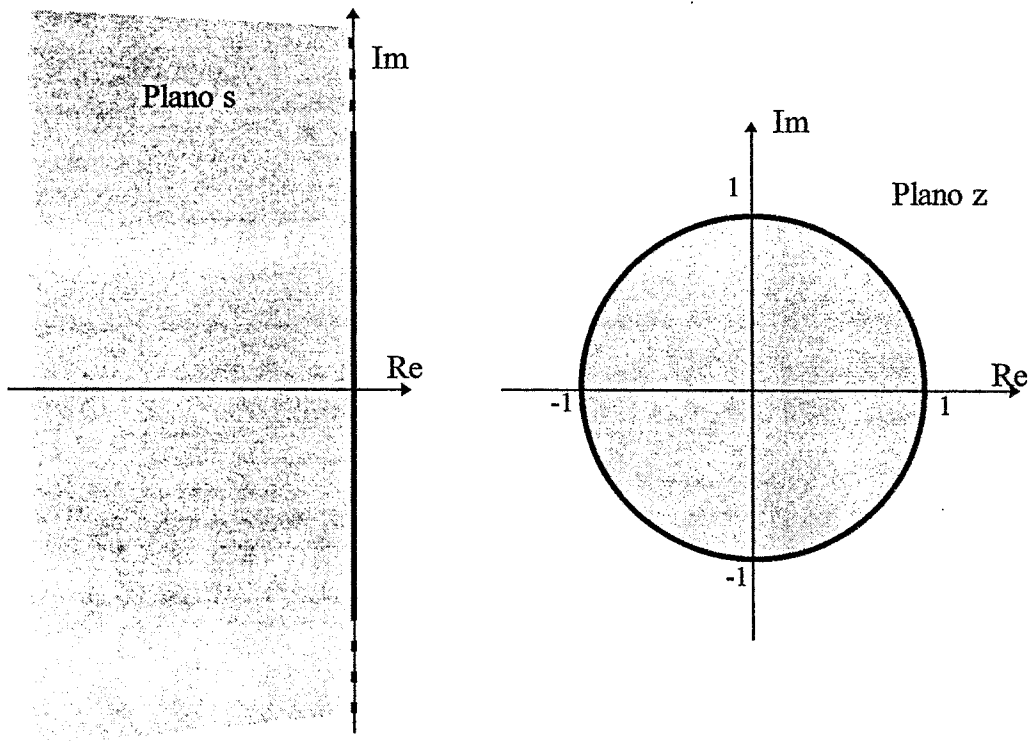


figura 3.7

Este mapeamento garante a estabilidade da função $F(z)$. O método provoca no entanto algumas alterações na resposta em frequência do sistema, nomeadamente no diagrama de amplitudes. A sua simplicidade é grande argumento a seu favor.

CAPÍTULO 4

MÉTODOS EM MALHA FECHADA

4 - Métodos em Malha Fechada (Closed Loop)

4.1 INTRODUÇÃO

Iremos agora apresentar alguns métodos de discretização em malha fechada. Estes métodos, como foi referido anteriormente, tentam obter um desempenho do sistema discreto em malha fechada, idêntico ao que possuía o sistema contínuo, também em malha fechada.

Esta abordagem é muito diferente da que utilizam os métodos em malha aberta. De facto, uma vez que se utiliza o sistema em malha fechada, é necessária informação sobre a planta o que não acontece nos métodos em malha aberta. Cada discretização efectuada, só é válida para o conjunto controlador + planta. Alterando um ou outro, implica refazer todo o processo de discretização. Nos métodos de malha aberta, uma vez efectuada a discretização, esta mantém-se válida, podendo o controlador discretizado ser utilizado independentemente da planta¹.

Como se referiu, nestes métodos tenta-se obter um desempenho do sistema discreto, igual ao do sistema contínuo. Na prática, esse desempenho pode ser aferido, através da comparação da resposta temporal dos dois sistemas a uma dada entrada¹, ou através da resposta em frequência desses dois sistemas.

Iremos de seguida apresentar alguns desses métodos. Porque, ao contrário dos de malha aberta, não terem nomes definidos, iremos apresentar os diferentes métodos com os nomes dos autores que os apresentaram.

4.2 - MÉTODO DE RATTAN

Este autor apresentou em 1984 (ver [14]) um método de discretização, que continua a ser utilizado como referência em diversos estudos sobre o assunto. O método propõe

¹ Pode no entanto acontecer que, com determinada planta, se obtenham melhores resultados utilizando um determinado método em malha aberta do que com outros.

calcular o controlador discreto, através da igualdade das respostas em frequência em malha fechada do sistema discreto e do sistema contínuo. A aplicação deste método a um sistema, pressupõe a sua representação, da forma com se mostra a seguir:

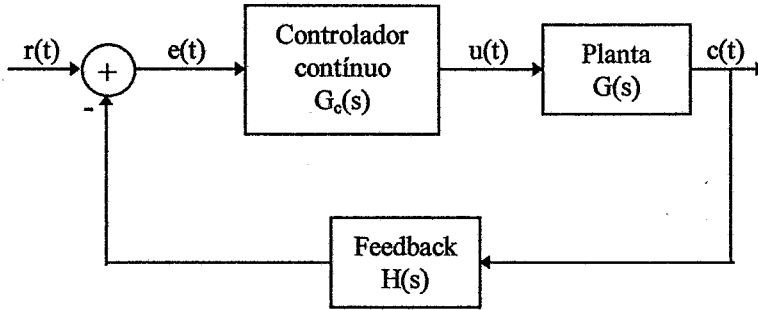


figura 4.1 a) - Sistema contínuo

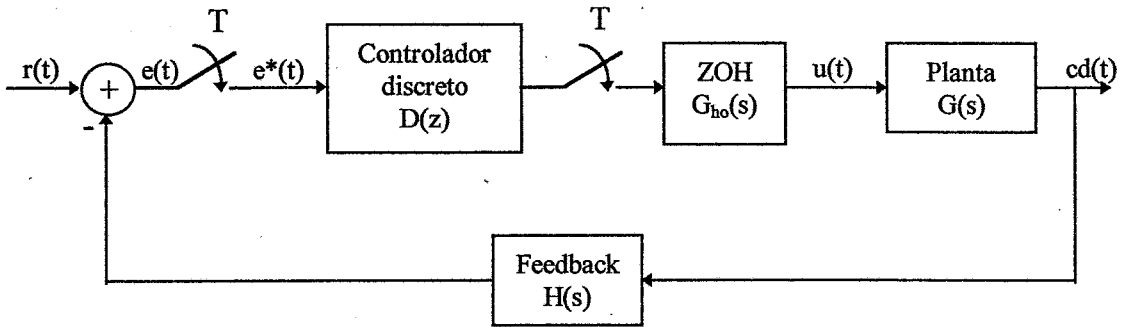


figura 4.1 b) - Sistema com controlador discreto

Calculando as funções de transferência em malha fechada dos dois sistemas, contínuo e discreto, e chamando-lhes respectivamente $F(s)$ e $F_d(s)$ ², podemos representá-las pelas seguintes equações:

$$F(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad (4.1)$$

¹ Utiliza-se aqui o mesmo princípio dos métodos de resposta invariante, descritos anteriormente.

² De facto, apesar de o sistema ser actuado por um controlador discreto, a relação entre os sinais $r(t)$ e $c_d(t)$ pode ser representada pela sua transformada de Laplace, uma vez que estes dois sinais são contínuos no tempo.

$$F_d(s) = \frac{D'(s)G_{ho}G(s)}{1 + D'(s)G_{ho}GH(s)} \quad (4.2)$$

$D'(s)$ é a representação, utilizando a transformada de Laplace, do controlador discreto $D(z)$. A partir destas funções de transferência em malha fechada, podemos calcular a resposta em frequência, quer do sistema contínuo, quer do sistema discreto. Para esse efeito, Rattan redefine $F_d(s)$ da seguinte forma, a partir de definição da variável $z = e^{sT}$.

$$F_d(s) = \frac{D(z)\{G_{ho}G(s)\}}{1 + D(z)\{G_{ho}GH(z)\}} \quad (4.3)$$

Em que $\{G_{ho}GH(z)\} = \mathcal{Z}\{G_{ho}GH(s)\}$. Calculando a partir desta expressão, e na forma de número complexo, a resposta em frequência de $F_d(s)$, temos:

$$A_n + jB_n = \frac{1}{T} G_{ho}G(s) \Big|_{s=j\omega_n} \cdot \frac{D(z)}{1 + D(z)G_{ho}GH(z)} \Big|_{z=e^{sT}, z=1 \angle bT} \quad (4.4)$$

Na equação anterior, $\omega_n = b + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)$, com $n \geq 0$ e inteiro. Se $n = 0$, teremos a componente fundamental da resposta em frequência. Se $n \neq 0$, temos a contribuição de outros componentes na resposta em frequência, devidos precisamente ao fenómeno de aliasing já referido anteriormente. No seu artigo, Rattan, apresenta a equação anterior

transposta para o plano w , fazendo $w = \frac{j\left(\frac{2\pi n}{T}\right)}{\tan\left(\frac{\omega_n T}{2}\right)}$ e $z = \frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}}$. Da equação 4 resulta

então que o seu último termo será dado por:

$$G_A(w) = \frac{D(z)}{1 + D(z)G_{ho}GH(z)} \Big|_{z = \frac{1 + wT/2}{1 - wT/2}} \quad (4.5)$$

¹ Uma vez que z é função de s , podemos ver a equação como função de somente s .

Relembrando a equação 3 e transpondo para o plano w , podemos verificar que:

$$F_d(w) = \frac{w}{1 + \frac{wt}{2}} \cdot \frac{D(z)}{1 + D(z)G_{ho}GH(z)} \Big|_{z=esT, z=1\angle bT} \cdot \frac{G(s)}{s} \Big|_{s=j(2/T)\tan^{-1}(wT/2)} \quad (4.6)$$

Recordemos que $D(z)$ representa o controlador discreto que se pretende calcular, de forma a atingir o objectivo de igualar as respostas em frequência dos sistemas discreto e contínuo em malha fechada. Definindo esse controlador no domínio w da seguinte forma:

$$D(w) = \frac{a_m w^m + a_{m-1} w^{m-1} + \dots + a_1 w + a_0}{b_n w^n + b_{n-1} w^{n-1} + \dots + b_1 w + 1}, \text{ com } m \leq n \quad (4.7)$$

temos que será necessário determinar os valores a_i e b_i que cumpram o objectivo já referido. Com as várias fórmulas já enunciadas, podemos calcular a resposta em frequência do sistema contínuo em malha fechada através de $F(s)$, e calcular algumas das contribuições para a resposta em frequência do sistema discreto. Enunciando alguns desses resultados, temos então:

$$F(j\gamma) = F(s) \Big|_{s=j(2/T)\tan^{-1}(\gamma T/2)} = A + jB \quad (4.8)$$

A utilização de γ e a sua dependência de s , como se enuncia na fórmula 8, no cálculo da resposta em frequência, tem a ver com o facto de o mesmo ser efectuado no plano w^1 . O facto de a resposta em frequência ser apresentada como um número complexo na forma algébrica, tem a ver com o modo como alguns cálculos são efectuados mais à frente.

A resposta em frequência do sistema discreto pode também ser calculada a partir da equação 6, ficando no entanto essa resposta dependente em parte do controlador discreto $D(z)$. Representaremos essa parte por $X' + jY'$. Temos então:

¹ Rattan defende a utilização deste procedimento, com o argumento de que assim se obtém maior precisão na implementação numérica do algoritmo.

$$F_d(j\gamma) = \frac{(X' + jY')(X_1 + jY_1)}{1 + (X' + jY')(X_2 + jY_2)} \quad (4.9)$$

Facilmente se identificam os diversos factores desta equação, definindo $(X_1 + jY_1)$ e $(X_2 + jY_2)$ da seguinte forma:

$$X_1 + jY_1 = \frac{w}{1 + \frac{wt}{2}} \bigg|_{w=j\gamma} \frac{G(s)}{s} \bigg|_{s=j(2/T) \tan^{-1}(\gamma T/2)} \quad (4.10)$$

$$X_2 + jY_2 = G_{ho}GH(j\gamma) = G_{ho}GH(z) \bigg|_{z=(1+j\gamma T/2)/(1-j\gamma T/2)} \quad (4.11)$$

Se, na equação 7, substituirmos w por $j\gamma$, podemos facilmente demonstrar que $X' + jY'$ pode ser dado por:

$$X' + jY' = \frac{P + j\gamma Q}{1 + L + jM} \quad (4.12)$$

com:

$$P = a_0 - a_2\gamma^2 + a_4\gamma^4 - a_6\gamma^6 + \dots \quad (4.13a)$$

$$Q = a_1 - a_3\gamma^2 + a_5\gamma^4 - a_7\gamma^6 + \dots \quad (4.13b)$$

$$L = -b_2\gamma^2 + b_4\gamma^4 - b_6\gamma^6 + \dots \quad (4.13c)$$

$$M = b_1 - b_3\gamma^2 + b_5\gamma^4 - b_7\gamma^6 + \dots \quad (4.13d)$$

Como se podem utilizar agora todas estas funções que foram definidas? Como pretendemos igualar as respostas em frequência dos sistemas contínuo e discreto, podemos definir um erro entre precisamente entre essas duas respostas:

$$e(\gamma) = F(j\gamma) - F_d(j\gamma) \quad (4.14)$$

Este erro é definido somente para um valor específico de frequência γ . Alargando esse

erro a toda uma banda $[\gamma_1 \ \gamma_2]$, podemos finalmente definir a função erro que será minimizada. Essa minimização produzirá como resultado os valores das constantes a_i e b_i com as quais será possível implementar o controlador $D(z)$. Temos então o erro:

$$E = \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} |F(j\gamma) - F_d(j\gamma)|^2 d\gamma \quad (4.15)$$

Através de alguma manipulação matemática, consegue-se transformar a equação 15.

$$E = \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} [(A\sigma - B\tau - \phi)^2 + (A\tau + B\sigma - \theta)^2] d\gamma \quad (4.16)$$

$$\phi = PX_1 - \gamma QY_1 \quad (4.17a)$$

$$\theta = PY_1 + \gamma QX_1 \quad (4.17b)$$

$$\sigma = 1 + L + PX_2 - \gamma QY_2 \quad (4.17c)$$

$$\tau = \gamma M + PY_2 + \gamma QX_2 \quad (4.17d)$$

Repare-se que o erro E depende dos a_i e b_i através dos factores P , Q , L e M . Efectuando a diferenciação do erro E em ordem aos a_i e aos b_i , e igualando as equações resultantes a zero, obtemos $m+n+1$ equações para $m+n+1$ incógnitas. Rattan efectua todos estes cálculos e apresenta os resultados da seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 & 0 & -T_2 & 0 & T_4 & 0 & \dots & V_1 & -U_2 & -V_3 & U_4 & V_5 & -U_6 & \dots \\ 0 & T_2 & 0 & -T_4 & 0 & T_6 & \dots & U_2 & V_3 & -U_4 & -V_5 & U_6 & -V_7 & \dots \\ -T_2 & 0 & T_4 & 0 & -T_6 & 0 & \dots & -V_3 & U_4 & V_5 & -U_6 & -V_7 & U_8 & \dots \\ 0 & -T_4 & 0 & T_6 & 0 & -T_8 & \dots & -U_4 & -V_5 & U_6 & V_7 & -U_8 & -V_8 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_1 & U_2 & -V_3 & -U_4 & V_5 & U_6 & \dots & W_2 & 0 & -W_4 & 0 & W_6 & 0 & \dots \\ -U_2 & V_3 & U_4 & -V_5 & -U_6 & V_7 & \dots & 0 & W_4 & 0 & -W_6 & 0 & W_8 & \dots \\ -V_3 & -U_4 & V_5 & U_6 & -V_7 & -U_8 & \dots & -W_4 & 0 & W_6 & 0 & -W_8 & 0 & \dots \\ U_4 & -V_5 & -U_6 & V_7 & U_8 & -V_9 & \dots & 0 & W_6 & 0 & W_8 & 0 & -W_{10} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -U_0 \\ V_1 \\ U_2 \\ -V_3 \\ \vdots \\ 0 \\ W_2 \\ 0 \\ W_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$T_h = \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} [(A^2 + B^2)(X_2^2 + Y_2^2) + (X_1^2 + Y_1^2) + 2B(X_1Y_2 - X_2Y_1) - 2A(X_1X_2 + Y_1Y_2)] \gamma^h d\gamma \quad (4.19)$$

$$U_h = \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} (A^2 + B^2)X_2 - (AX_1 + BY_1) \gamma^h d\gamma \quad (4.20)$$

$$V_h = \int_{r^2}^{r^1} (A^2 + B^2)Y_2 + (BX_1 - AY_1)\gamma^h d\gamma \quad (4.21)$$

$$W_h = \int_{r^2}^{r^1} (A^2 + B^2)\gamma^h d\gamma \quad (4.22)$$

Com estas equações, o algoritmo pode ser aplicado a qualquer sistema, calculando-se o controlador discreto por determinação das constantes a_i e b_i .

4.3 - MÉTODO DE KENNEDY E EVANS

Em 1990 (ver [19]), estes autores apresentaram um método que pretende, segundo os próprios, ultrapassar algumas das dificuldades que as diferentes técnicas de síntese de controladores digitais apresentam. Estas técnicas podem dividir-se em três grandes áreas que são:

- a) Transformação de analógico para digital usando métodos em malha aberta
- b) Transformação de analógico para digital usando métodos em malha fechada
- c) Síntese directamente no domínio digital de controladores

Como motivação para desenvolverem este novo método, os autores defendem que os métodos de malha aberta impõem, quase sempre, períodos de amostragem pequenos, por se perder qualidade no desempenho do sistema quando se tenta aumentar esses tempos. Estes períodos de amostragem reduzidos, provocam problemas de implementação algorítmica em computador, devido ao pouco tempo disponível para cálculo entre instantes de amostragem. A utilização de métodos em malha fechada, com bom conhecimento da planta a controlar, permite resolver, em parte, esse problema, já que esse conhecimento da planta, permite obter maiores períodos de amostragem, sem que isso provoque perdas no desempenho do sistema.

Conjuntamente com a utilização de técnicas de discretização em malha fechada, os autores propõem usar métodos de síntese directa no domínio digital, tentando assim obter, de alguma forma, as vantagens de um e de outro processo.

Para apresentarmos o processo de determinação do controlador discreto, convém estabelecer algumas definições no que diz respeito à notação utilizada pelos autores.

Em primeiro lugar, o sistema que os mesmos utilizam no desenvolvimento do seu método, é apresentado não na forma clássica, como na figura 1, mas sim na forma RST. Nesta forma, o controlador é definido por três polinómios, $R(z)$, $S(z)$ e $T(z)$. O diagrama de blocos do sistema nesta forma é o seguinte:

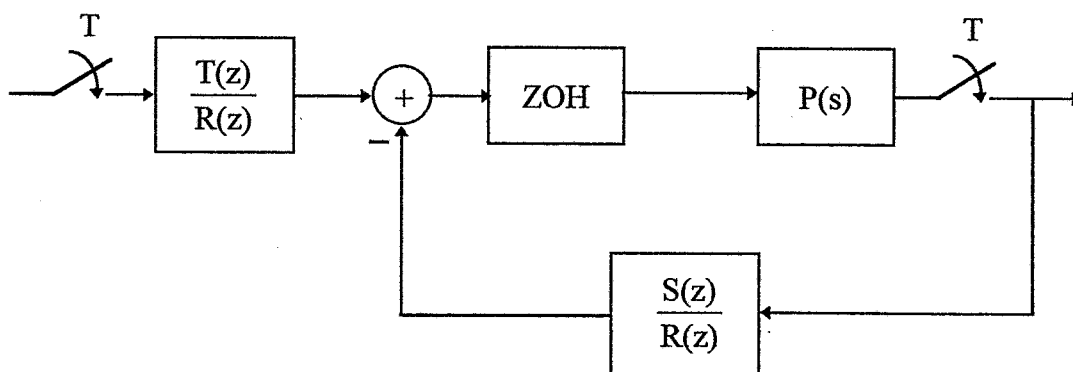


figura 4.2 - implementação na forma RST de um sistema de controlo

Definimos ainda a função de transferência $\frac{B(z)}{A(z)}$, como sendo o resultado da discretização por ZOH da planta $P(s)$.

$$\frac{B(z)}{A(z)} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} \quad (4.23)$$

O polinómio $B(z)$, é ainda definido como sendo o produto de 2 polinómios, sendo então:

$$B(z) = B_e^+(z)(B_e^- B_p)(z) \quad (4.24)$$

em que $B_p(z)$ representa os zeros da discretização devidos à planta e $(B_e^+ B_e^-)(z)$, representa os zeros devidos ao processo de discretização com o ZOH. B_e^+ representa os

zeros com alto amortecimento¹ e $B_e^-(z)$ os zeros pouco amortecidos ou de fase não mínima.

Considerando que o sistema contínuo original tem como função de transferência em malha fechada $C(s)$, os autores definem a função $\frac{\tilde{B}_m(z)}{A_m(z)}$ como sendo resultante da discretização por ZOH de $C(s)$ ou seja:

$$\frac{\tilde{B}_m(z)}{A_m(z)} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{C(s)}{s}\right\} \quad (4.25)$$

Também aqui o polinómio $\tilde{B}_m(z)$ é fraccionado em diversas componentes que passamos a apresentar e explicar:

$$\tilde{B}_m(z) = (\tilde{B}_p \tilde{B}_c \tilde{B}_e)(z) \quad (4.26)$$

em que $\tilde{B}_p(z)$ representa os zeros devidos aos zeros da planta contínua ($P(s)$), $\tilde{B}_c(z)$ os zeros devidos aos zeros do controlador contínuo e finalmente $\tilde{B}_e(z)$ representa os zeros devidos à discretização com o ZOH da função $C(s)$.

Se for calculada a função de transferência em malha fechada do sistema da figura e tendo em conta as definições referidas temos:

$$\text{FTMF} = \frac{B_e^+(B_e^- B_p)T}{AR + B_e^+(B_e^- B_p)S} \quad (4.27)$$

Se pretendemos um desempenho idêntico entre este sistema discreto e o sistema contínuo original, podemos expressar isso através da igualdade seguinte:

¹ É óbvio que este alto amortecimento será sempre relativo

$$\text{FTMF} = \frac{B_e^+(B_e^- B_p)\Gamma}{AR + B_e^+(B_e^- B_p)S} = \frac{\tilde{B}_m(z)}{A_m(z)} = \frac{\tilde{B}_p \tilde{B}_c \tilde{B}_e^{-1}}{A_m} \quad (4.28)$$

Os autores partem então desta igualdade para chegarem ao resultado final. No desenvolvimento que se segue, e a fim de evitarem alguns problemas, introduzem mais dois polinómios que passamos a descrever. O primeiro é o polinómio $B_e^*(z)$ que é introduzido como sendo responsável pela introdução de zeros que evitam o aparecimento de atrasos na resposta do sistema. Desta forma $\tilde{B}_e \cong (B_e^- B_e^*)(z)$. Um outro polinómio introduzido é $R'(z)$, que corresponde somente a uma factorização de $R(z)$ de forma a que $R(z) = B_e^+(z) R'(z)$.

Tendo efectuado todos estes desenvolvimentos, podemos agora efectuar o cálculo de $R(z)$, $S(z)$ e $T(z)$ a partir das seguintes equações:

$$T(z) = (\tilde{B}_c B_e^*)(z) A_0(z) \quad (4.29a)$$

$$A(z)R'(z) + (B_e^- B_p)(z)S(z) = A_m(z)A_0(z) \quad (4.29b)$$

$A_0(z)$ é um polinómio observador e que os autores, no exemplo que ilustra o método, fazem simplesmente igual a 1. Pode no entanto ser necessário aumentar o grau de $A_0(z)$, segundo os autores, para assegurar que o controlador é causal. De notar que a equação 29b é uma equação Diofantina.

A possibilidade de selecção manual caso a caso, de alguns dos factores envolvidos nos cálculos, permite, por um processo iterativo, tentar diversas soluções no sentido de procurar aquela que melhor desempenho produz.

4.4 - MÉTODO DE KELLER E ANDERSON

Este método de discretização, apresentado em 1992 (ver [21]), tem como objectivo, não a obtenção de um desempenho o mais próximo possível entre os sistemas contínuo e

¹ Por vezes, para simplificar a expressão não indicamos a dependência de z

discreto, mas conseguir um sistema discretizado, que seja garantidamente estável. Com esse intuito, o método fornece como resultados, um limite superior para o período de amostragem por forma a manter a estabilidade no sistema discreto, ao mesmo tempo que permite aferir qual a perda no desempenho entre os sistemas contínuo e discreto.

A descrição deste método é bastante complexa pelo que a iremos apresentar de forma muito simplificada. Começemos por definir $P(s)$ como a função de transferência da planta¹, $C(s)$ o controlador contínuo que é conhecido, $C_d(z)$ é o controlador discreto a determinar, $F_a(s)$ representa um filtro antialiasing e $H(s)$ representa um retentor de ordem zero.

Para apresentarem o seu método, começam por definir o seguinte sistema:

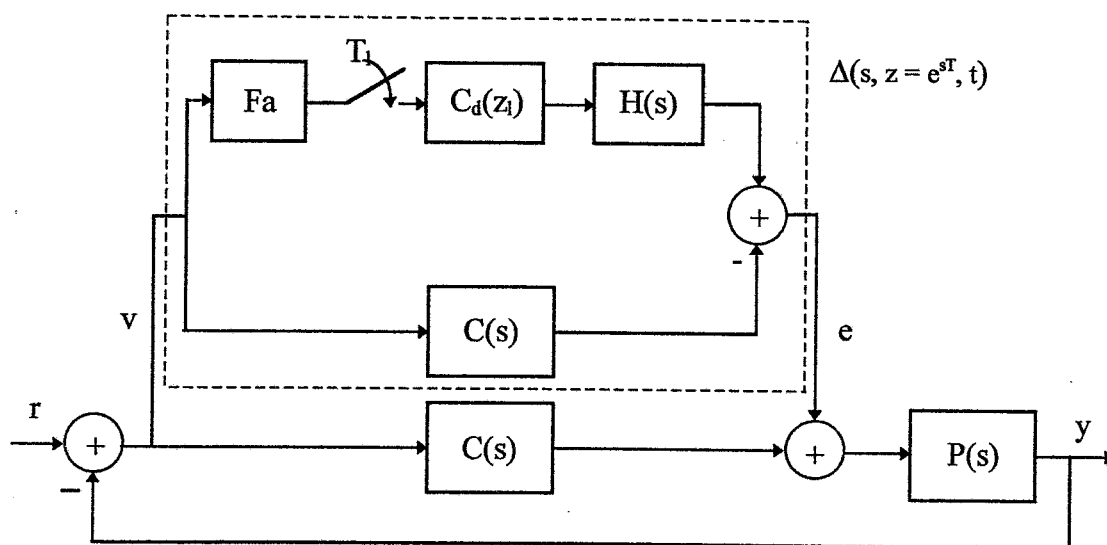


figura 4.3

Para atingirem os seus objectivos, os autores redesenam o sistema, colocando-o na seguinte forma:

¹ Esta planta pode ser multivariável, de acordo com as definições dos autores

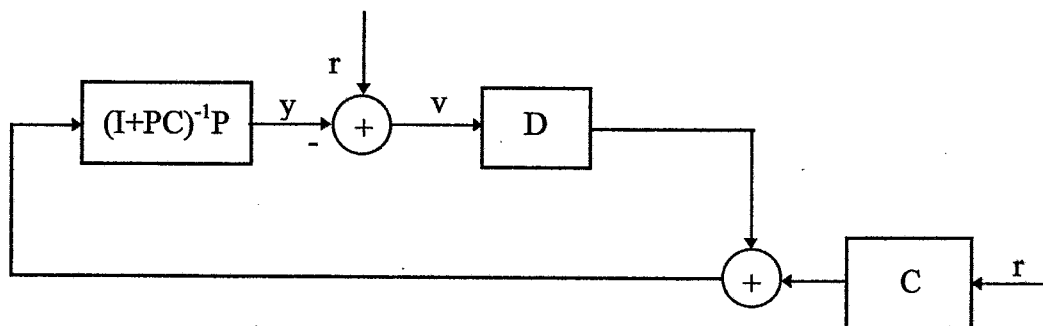


figura 4.4

em que I é a matriz identidade com a dimensão idêntica ao número de variáveis da planta¹.

Com base nestes sistemas define-se a função custo J_c da seguinte forma:

$$J_c = \Delta(I+PC)^{-1}P \quad (4.30)$$

A minimização de J_c pode conduzir à determinação do controlador discreto $C_d(z)$. De facto, note-se que este controlador, é o único elemento desconhecido que integra a definição de J_c . Verifica-se no entanto, segundo os autores, que J_c , ou mais propriamente $\|J_c\|$, é muito difícil de minimizar. Para obviar a este problema, desenvolvem algumas técnicas, que permitem obter uma aproximação a J_c , que denominam J_d . Esta aproximação deverá ser suficientemente válida para que o cálculo de $C_d(z)$ minimize J_d e J_c simultaneamente. Pretende-se contudo que J_d consiga ser efectivamente minimizado, levando assim ao cálculo desejado de $C_d(z)$.

Para levar a cabo esta aproximação de J_c por J_d , substituir-se-á os elementos contínuos de que depende o factor J_c , nomeadamente, $(I+PC)^{-1}P$, F_a , H e C por elementos discretos correspondentes. Na obtenção destes elementos discretos, admite-se que o período de amostragem a utilizar pode ser arbitrariamente pequeno, desde que seja submúltiplo do período T_1 , que se utiliza no controlador $C_d(z)$. Sendo assim, se J_d for definido do mesmo modo que J_c , mas com elementos discretos, podemos afirmar que J_d converge para J_c , se o período de amostragem que referimos ser arbitrariamente pequeno, convergir para zero. Podemos entender esta aproximação, através das duas figuras seguintes:

¹ Relembrar que $P(s)$ pode ser multivariável

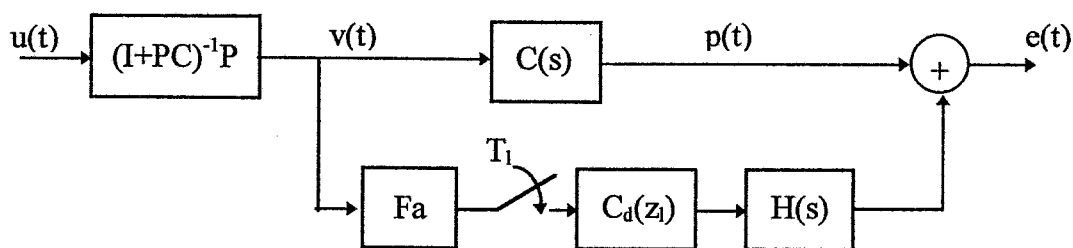


figura 4.5

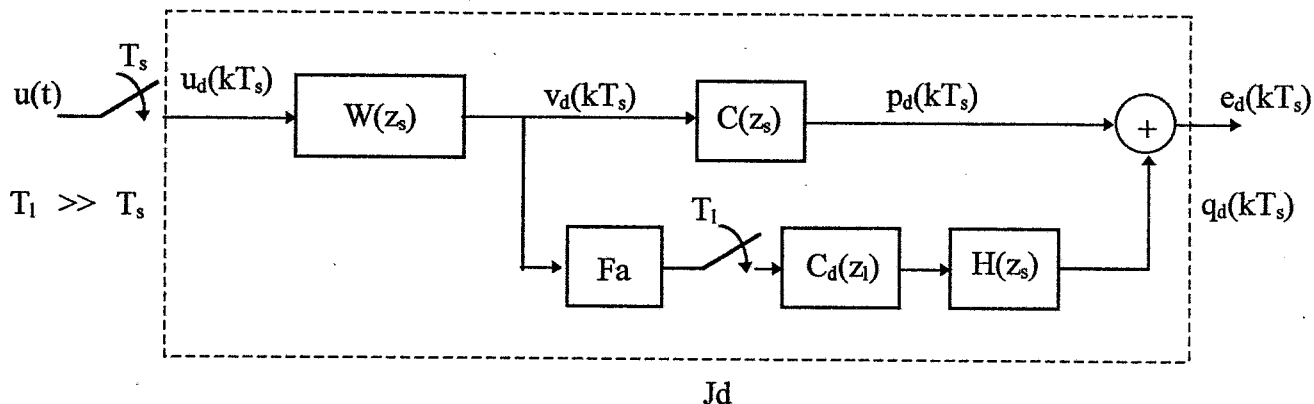


figura 4.6

Na figura 4.6, $W(z_s)$ representa a discretização do termo $(I+PC)^{-1}P$, com o período de amostragem T_s . Todos os termos em que aparece z_s , correspondem a discretizações efectuadas com o período de amostragem T_s . De facto o sistema da figura 6 possui dois períodos de amostragem, T_s e T_1 , que, como é referido se relacionam por $T_1 \gg T_s$. É este o facto que se utiliza na definição de J_d . Realmente, se T_s tender para 0, J_d tende para J_c . Através de diversas manipulações matemáticas, algumas de complexidade apreciável, os autores conseguem definir J_d , de tal maneira que se consegue efectuar a sua minimização por forma a obter $C_d(z)$.

4.5 - MÉTODO DE BLACKMORE, WILLIAMSON E MAREELS

Este método data de 1994 (ver [24]). Os autores pretendem utilizar técnicas de resposta invariante juntamente com técnicas em malha fechada. O seu objectivo é obter uma discretização de forma a que a resposta do sistema discreto a uma determinada entrada, seja idêntica à resposta do sistema contínuo a essa mesma entrada. Como já foi referido

anteriormente, nomeadamente na apresentação do método¹ da resposta invariante, a aferição da igualdade das respostas dos dois sistemas, só pode ser verificada nos instantes de amostragem. Os autores propõem uma abordagem ligeiramente diferente e apresentam um método, que permite obter igualdade entre as respostas dos dois sistemas, nos instantes de amostragem, ou em qualquer instante entre amostragens.

Inicialmente, apresentamos o método, somente para calcular o controlador discreto $C_d(z)$, que permite minimizar o erro entre a resposta do sistema contínuo amostrada à frequência de amostragem e a resposta do sistema discreto, que já é inerentemente amostrada. Considerando então um sistema do tipo apresentado na figura 7, pretendemos transformá-lo num sistema do tipo da figura 8.

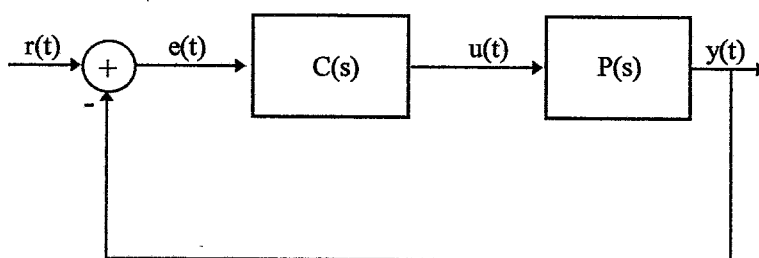


figura 4.7

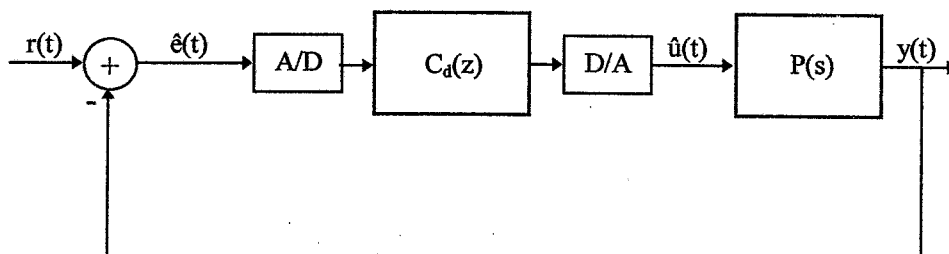


figura 4.8

Para aplicarem o seu método, os autores começam por apresentar a função custo que será minimizada, minimização essa que conduz à obtenção do controlador $C_d(z)$.

$$J(C_d(z)) = \|\hat{y}(kT) - y(kT)\|_2^2 \quad (4.31)$$

$y(kT)$, é a saída amostrada do sistema contínuo e $\hat{y}(kT)$ é a saída do sistema discreto. Uma vez que o presente método se baseia em técnicas de resposta invariante, é

¹ Em malha aberta

necessário definir a entrada $r(t)$. Essa entrada é devida a resposta impulsional. Calculando a função de transferência em malha fechada $H(s)$, do sistema contínuo, temos:

$$H(s) = \frac{P(s)C(s)}{I + P(s)C(s)} \quad (4.32)$$

Com esta função pode-se reescrever a função custo que fica:

$$J(C_d(z)) = \left\| \left[(I + P_T^s(z)C_d(z))^{-1} P_T^s(z)C_d(z) - H_T^r(z) \right] R_T(z) \right\|_2^2 \quad (4.33)$$

$P_T^s(z)$ corresponde à transformação invariante a uma entrada ao degrau de $P(s)$, $H_T^r(z)$ representa a transformação invariante ao sinal de referência $r(t)$, da função $H(s)$, $R_T(z)$ é a transformada Z do sinal $R(s)$.

Para conseguirem determinar o controlador $C_d(z)$ os autores começam por obter a factorização coprima da transformação invariante ao degrau de $P(s)$, $P_T^s(z)$.

$$P_T^s(z) = N(z)M^{-1}(z) \quad (4.34)$$

$$\tilde{X}(z)N(z) + \tilde{Y}(z)M(z) = 1 \quad (4.35)$$

Definem-se a seguir as funções $S(z)$ e $T(z)$:

$$S(z) = N(z)\tilde{X}(z)R_T(z) - H_T^r(z)R_T(z) \quad (4.36)$$

$$T(z) = N(z)M(z)R_T(z) \quad (4.37)$$

Estas duas funções são colocadas na forma de espaço de estados, de tal forma que:

$$[S \ T] = C(zI - A)^{-1}[B_1 \ B_2] + [D_1 \ D_2], \quad D_2 \neq 0 \quad (4.38)$$

Definem ainda os autores a função $Q(z)$ da seguinte forma:

$$Q(z) = -F(zI - A + B_2F)^{-1}(B_1 - B_2D_2^{-1}D_1) - D_2^{-1}D_1 \quad (4.39)$$

com:

$$F = (D_2^T D_2 + B_2^T P B_2)^{-1} (D_2^T C + B_2^T P A)$$

sendo P dado pela solução da equação de Riccati:

$$P = A^T P A - (C^T D_2 + A^T P B_2) (D_2^T D_2 + B_2^T P B_2)^{-1} (D_2^T C + B_2^T P A) + C^T C \quad (4.40)$$

Existem agora todas as funções necessárias à definição de $C_d(z)$, a qual se apresenta a seguir:

$$C_d(z) = (\tilde{X}(z) + M(z)Q(z)) (\tilde{Y}(z) - N(z)Q(z))^{-1} \quad (4.41)$$

Esta é, a definição de $C_d(z)$ que garante a minimização da função dada pelas equações 31 e 33, as quais garantem apenas a igualdade da resposta entre os sistemas discreto e contínuo, nos instantes de amostragem. Se a equação de Riccati 4.40, tiver solução nula¹, é apresentado como corolário deste método, uma fórmula para determinação de $C_d(z)$, mais simples e de cálculo directo a partir do dados conhecidos do sistema. Apresentamos a seguir essa fórmula.

$$C_d(z) = \frac{Z_T\{P(s)C(s)\mathcal{E}(s)\}}{Z_T\{\mathcal{E}(s)\}P_T^s(z)} \quad (4.42)$$

com

$$\varepsilon(s) = \frac{R(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad (4.43)$$

Foi dito na apresentação do presente método, que ele garante a igualdade das respostas, nos instantes de amostragem, ou em qualquer instante entre amostragens. Para obter esse resultado, é necessário redefinir ligeiramente a função custo, por introdução da

¹ Isto é conseguido se $R(s)$ for de grau relativo igual a 1 e $P_T^s(z)$ for assintoticamente estável e de fase mínima

transformada z modificada. Fica então:

$$J(C_d(z), \xi) = \|\hat{y}(kT + \xi) - y(kT + \xi)\|_2^2 \quad (4.44)$$

$$J(C_d(z), \xi) = \|(I + P_T^s(z)C_d(z))^{-1}P_{T,\xi}^s(z)C_d(z)R_T(z) - Y_{T,\xi}(z)\|_2^2 \quad (4.45)$$

Nesta nova definição, ξ é um valor que se situa entre 0 e T (período de amostragem), que permite definir o instante entre amostragens que se deseja estudar. $P_{T,\xi}^s(z)$ é a transformada de $P(s)$ obtida através da resposta invariante modificada ao degrau e $Y_{T,\xi}(z)$ é a transformada z modificada de $H(s)R(s)$.

A aplicação que os autores fazem desta técnica na discretização de um controlador contínuo específico, não requer o conhecimento do valor ξ mais apropriado à discretização. De facto o algoritmo geral consiste em fazer um varrimento de diversos valores de ξ entre 0 e T, com um passo apropriado (por exemplo 0.05T ou 0.005T). Para cada um destes passos, determina-se o valor do controlador $C_d(z)$ e com esse controlador avalia-se o valor da função custo definida anteriormente¹. No final deste processo, utiliza-se o controlador que produziu o melhor resultado em termos da função custo.

Note-se que este método produz controladores de ordem bastante elevada. De facto, a equação 4.42 produz uma função de transferência de ordem igual à soma do número de pólos $P(s)$, com o número de pólos de $C(s)$ e de $R(s)$. Para, a partir deste modelo se obter outro de ordem mais reduzida, é necessário utilizar técnicas de redução de modelo.

¹ De facto, a avaliação da função custo é efectuada não apenas no instante definido por ξ , mas utilizando uma função custo ligeiramente modificada, que alarga a todo o período de amostragem essa avaliação.

CAPÍTULO 5

APROXIMAÇÃO LOGARÍTMICA

5 - Aproximação Logarítmica

5.1 - INTRODUÇÃO

Apresentamos agora um método de discretização, que parte da aproximação das respostas em frequência de um sistema contínuo e de um sistema discreto. A obtenção do controlador contínuo é realizada com um algoritmo de identificação de parâmetros através dos diagramas de Bode, apresentado por Lopes dos Santos e Martins de Carvalho [30 e 31].

5.2 - DISCRETIZAÇÃO ATRAVÉS DA APROXIMAÇÃO ENTRE RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA EM MALHA ABERTA

Se dois sistemas realimentados tiverem respostas em frequência em malha aberta iguais, as suas características de sensibilidade, rejeição a perturbações, etc., são iguais e, em certos casos, é mesmo possível fazer com que as respostas em frequência em malha fechada dos dois sistemas sejam iguais. Esta constatação pode-nos levar a fazer o seguinte raciocínio: se, na banda de frequências $0 < \omega < \omega_N$ em que ω_N é a frequência de Nyquist, as respostas em malha aberta dos sistemas representados nas figuras 5.1 e 5.2 forem iguais, então ambos têm desempenhos idênticos. Este raciocínio baseia-se no facto de a frequência de Nyquist ser superior à largura de banda do ZOH e, normalmente, muito superior à da planta $P(s)$. Consequentemente, tudo o que se passa a frequências superiores à de Nyquist, não tem um peso significativo no desempenho do sistema.

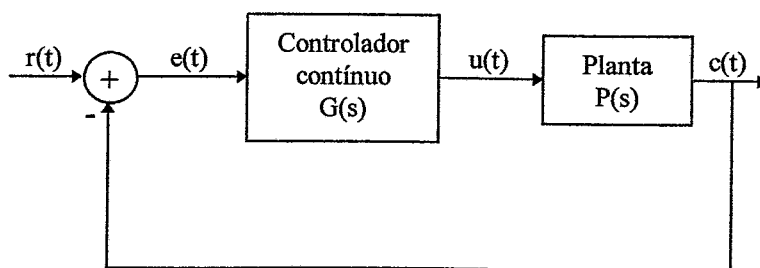


figura 5.1 - sistema de controlo contínuo

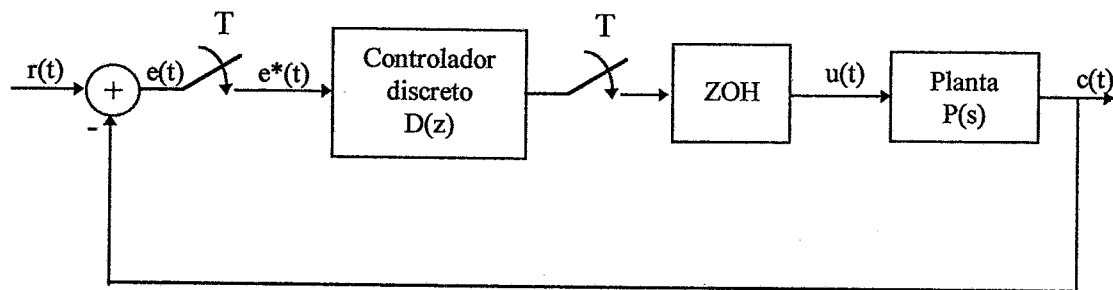


figura 5.2 - sistema de controlo discreto

Para que os dois sistemas tenham a mesma resposta em frequência em malha aberta, tem que se verificar a seguinte condição:

$$|D(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{|G(s)|_{s=j\omega}}{|ZOH|_{s=j\omega}} \quad (5.1)$$

definido o conjunto de observações

$$Y(j\omega_k) = \frac{G(j\omega_k)}{ZOH(j\omega_k)} \quad k = 1, \dots, N \quad (5.2)$$

o problema da determinação de $D(z)$ pode ser encarado como um problema de identificação paramétrica no domínio das frequências, em que $Y(j\omega_k)$ constitui o conjunto de observações.

Para identificar $D(z)$, existem vários algoritmos mas, como o erro relativo tem uma importância muito grande na robustez do sistema e a minimização dum erro logarítmico é equivalente à dum erro relativo, optamos pelo algoritmo de identificação paramétrica no domínio das frequências proposto por Lopes dos Santos e Martins de Carvalho [30 e 31]. Deste modo, $D(z)$ será o controlador que minimiza o critério:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\ln|Y(j\omega_k)| - \ln|D(e^{j\omega_k T})| \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\ln|G(j\omega_k)| - \ln|ZOH(j\omega_k)| - \ln|D(e^{j\omega_k T})| \right)^2 \quad (5.3)$$

Como, neste problema, pretendemos calcular um sistema discreto, tivemos que utilizar a transformação de Tustin, para termos um problema idêntico ao da determinação dum

modelo contínuo que é o que foi abordado por Lopes dos Santos e Martins e Carvalho.

5.3 - O ALGORITMO DE IDENTIFICAÇÃO DE PARAMÉTRICA NO DOMÍNIO DAS FREQUÊNCIAS

Falemos agora um pouco sobre o algoritmo de identificação utilizado pelo presente método. É conhecido o efeito que um pólo e um zero têm, sobre um diagrama de amplitudes e de fases, de uma resposta em frequência. É baseado nesse efeito que o algoritmo actua. Sendo fornecidos os dados de um diagrama de amplitudes e de fases ao algoritmo¹, este começa por gerar uma função de transferência sem pólos nem zeros. Comparando sequencialmente os diagramas gerados por esta função, com aqueles que foram fornecido ao algoritmo, depressa se detectarão diferenças. Se essa diferença for maior que um determinado limiar imposto pelo utilizador, será introduzido um pólo ou um zero ao modelo que está a ser estimado, conforme a diferença entre os diagramas é positiva ou negativa. Reparemos nas figuras seguintes, que procuram explicar as situações de introdução de um zero e de um pólo, respectivamente.

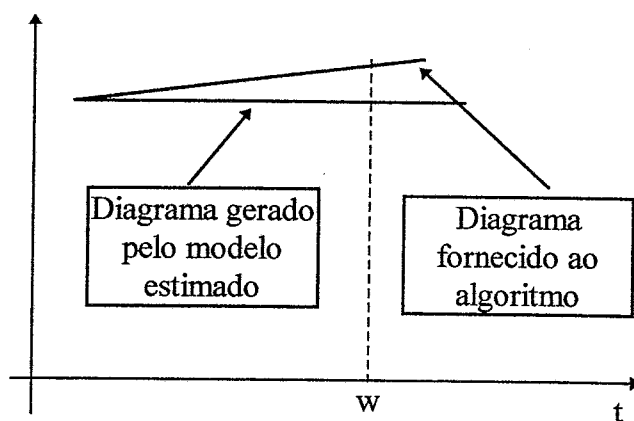


figura 5.3 - introdução pelo algoritmo de um zero

¹ Estes dados, podem ser ou experimentais ou, como no caso de aplicação do nosso método, gerados a partir de uma função de transferência conhecida.

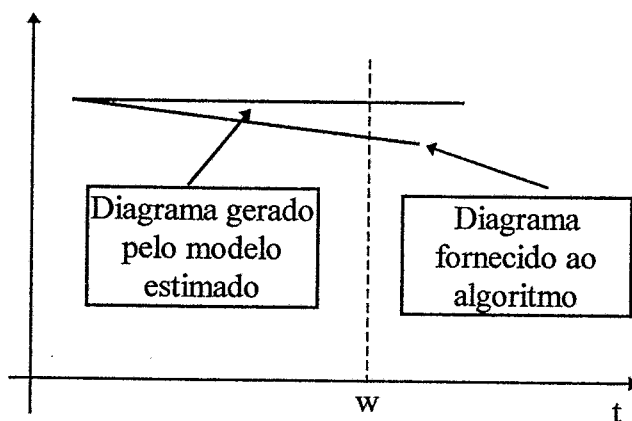


figura 5.3 - introdução pelo algoritmo de um pólo

Nos casos apresentados nas figuras anteriores, seria introduzido um zero ou um pólo, à frequência w , se nessa frequência fosse ultrapassado o limiar imposto para detecção de uma raiz. Este procedimento aparentemente tão simples, tem obviamente que ser protegido contra a introdução de raízes em excesso. Outro cuidado a ter, resulta do facto de, uma elevação do diagrama de amplitudes, poder ser causada por um zero real, ou por um par de pólos complexos¹. Essa dúvida pode ser eliminada por análise do diagrama das fases. Todos estes, e outros problemas são tidos em conta na implementação do algoritmo.

Os pólos, ou zeros, reais são calculados por forma a anular o erro entre os diagramas de amplitude à frequência a que são detectados. Os pares de pólos e zeros complexos, são calculados por forma a anular simultaneamente os erros entre os diagramas de amplitude e fase. Sempre que é processada uma nova frequência, o modelo estimado é otimizado através dum algoritmo semelhante ao da máxima verosimilhança recursiva, que é utilizado para a identificação em tempo real de modelos ARMAX, cujas iterações actualizam os parâmetros sempre numa direcção de descida do valor da função custo.

O resultado obtido nesta primeira fase, é posteriormente refinado, através da minimização do erro médio quadrático, entre o diagrama gerado pelo modelo estimado e o diagrama fornecido ao algoritmo. Essa minimização, é efectuada utilizando um método de Newton-Raphson modificado. A última versão deste algoritmo, identifica também atrasos de transporte, existentes no sistema que gerou os diagramas. Essa identificação é efectuada através de informação retirada do diagrama das fases.

¹ Similarmente, uma diminuição pode ser causada por um pólo real ou por um par de zeros complexos.

Em termos gerais, é este o algoritmo utilizado pelo método que descrevemos. Uma consulta aos artigos em que o mesmo é apresentado, mostra que a sua implementação é um pouco mais complicada, do que se pode deduzir da apresentação que aqui é feita do mesmo.

CAPÍTULO 6

EXEMPLOS

6 - Exemplos

6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo iremos comparar os métodos de discretização que apresentamos nos capítulos anteriores, em três exemplos numéricos.

6.2 - SISTEMAS DE TESTE

Um dos exemplos que vamos apresentar consiste na discretização dum controlador projectado para uma planta que é considerado como sendo um “benchmarck” desenvolvido pelo Laboratório de Controlo Automático de Grenoble ([27] e [28]).

Esta planta consiste (ver figura 1) num motor que acciona um veio ligado a um disco. Uma correia elástica transmite esse movimento a outro veio central. Este veio central, por sua vez, e também por meio de uma correia elástica, transmite o movimento a um terceiro veio. Associado a este último veio encontra-se uma carga que pode variar de peso. Consideramos três situações: vazio; meia carga e plena carga.

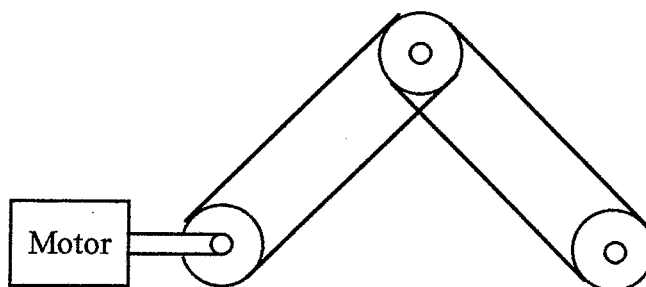


figura 6.1 - planta do exemplo de Grenoble

O objectivo de controlo desta planta consiste em posicionar a carga numa determinada posição.. As oscilações existentes nas correias elásticas que fazem a ligação dos três veios dificultam o controlo. Este sistema, como é óbvio, não funciona do mesmo modo para valores diferentes da carga nele colocados. Apresentamos a seguir os modelos identificados para as situações de a) vazio; b) meia carga; c) plena carga.

$$a) \quad H(z) = \frac{0.28261z + 0.50666}{z^4 - 1.41833z^3 + 1.58939z^2 - 1.31608z + 0.88642} \quad (6.1)$$

$$b) \quad H(z) = \frac{0.10276z + 0.18123}{z^4 - 1.99185z^3 + 2.20265z^2 - 1.84083z + 0.89413} \quad (6.2)$$

$$c) \quad H(z) = \frac{0.064087z + 0.10407}{z^4 - 2.0967z^3 + 2.3196z^2 - 1.93353z + 0.87129} \quad (6.3)$$

Estas funções discretas, correspondem aos seguintes modelos contínuos, se considerarmos uma discretização efectuada segundo o processo ZOH, em que as funções $H(z)$ e $H(s)$, se podem identificar na figura 2.

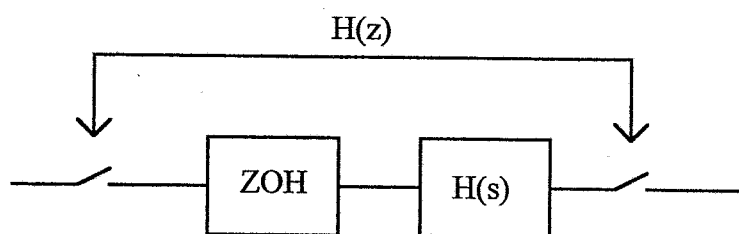


figura 6.2

$$a) \quad H(s) = \frac{0.2826s^4 + 13.1508s^3 + 686.1412s^2 + 15455s + 175290}{s^4 + 2.4113s^3 + 1260.4s^2 + 1296.1s + 164660} \quad (6.4)$$

$$b) \quad H(s) = \frac{0.1027s^4 + 5.008s^3 + 343.3515s^2 + 3104.2s + 73941}{s^4 + 2.2381s^3 + 2036.0s^2 - 49384s + 102730} \quad (6.5)$$

$$c) \quad H(s) = \frac{0.06408s^4 + 3.0483s^3 + 141.3207s^2 + 3205.9s + 34668}{s^4 + 2.7556s^3 + 875.1740s^2 + 951.2023s + 33123} \quad (6.6)$$

Este sistema serviu de base a um desafio lançado pelo laboratório de Grenoble. Foi pedido a diversos centros de investigação ou a investigadores particulares, que desenvolvessem um controlador para a planta apresentada. Esse controlador teria que efectuar o controlo da planta, dentro de diversas especificações impostas pelo laboratório. O laboratório recebeu 8 respostas de outros tantos grupos de investigação. Em [27], podemos estudar as diversas propostas e comparar as mesmas entre si. Quase todos os controladores responderam positivamente à generalidade das especificações impostas. No entanto, só um dos controladores ([28] e [29]) verificou todas as especificações. É sobre esse controlador, que iremos efectuar alguns dos testes dos métodos apresentados neste trabalho. Infelizmente, a capacidade de responder

positivamente às diferentes especificações, teve como contrapartida um controlador de ordem bastante elevada. Este facto provocou alguns problemas de implementação [27]. Apresentamos a seguir a função de transferência deste controlador.

$$C(s) = \frac{a_9s^9 + a_8s^8 + a_7s^7 + a_6s^6 + a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}{s^9 + b_8s^8 + b_7s^7 + b_6s^6 + b_5s^5 + b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0} \quad (6.7)$$

com

$$a_9 = 2.684 \quad (6.7a)$$

$$a_8 = 473.3; b_8 = 267.5978 \quad (6.7b)$$

$$a_7 = 2.543 \cdot 10^4; b_7 = 3.1524 \cdot 10^4 \quad (6.7c)$$

$$a_6 = 1.1409 \cdot 10^6; b_6 = 2.0484 \cdot 10^6 \quad (6.7d)$$

$$a_5 = 2.4543 \cdot 10^7; b_5 = 7.928 \cdot 10^7 \quad (6.7e)$$

$$a_4 = 3.8265 \cdot 10^8; b_4 = 1.8452 \cdot 10^9 \quad (6.7f)$$

$$a_3 = 2.197 \cdot 10^9; b_3 = 2.7728 \cdot 10^{10} \quad (6.7g)$$

$$a_2 = 1.3849 \cdot 10^{10}; b_2 = 1.9921 \cdot 10^{11} \quad (6.7h)$$

$$a_1 = -4.1079 \cdot 10^{10}; b_1 = 8.9741 \cdot 10^{11} \quad (6.7i)$$

$$a_0 = 9.6116 \cdot 10^{11}; b_0 = 0.0533 \quad (6.7j)$$

Os investigadores que desenvolveram este controlador, produziram inicialmente um controlador contínuo discretizando-o posteriormente, por meio da transformação de Tustin, para ser implementado em computador. Será este controlador contínuo que servirá como exemplo de discretização.

Outros dois sistemas irão ser utilizados para testar o desempenho dos vários processos de discretização. Esses sistemas são descritos a seguir:

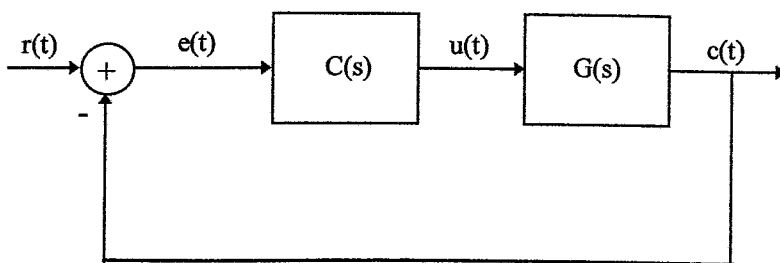


figura 6.3

sistema 1		sistema 2	
Planta	Controlador	Planta	Controlador
$G(s) = \frac{863.3}{s^2}$	$C(s) = \frac{2940s + 86436}{(s + 294)^2}$	$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$	$C(s) = \frac{0.416s + 1}{0.139s + 1}$

O sistema 1 foi proposto por Paul Katz¹ no seu livro [9], e foi utilizado por diversos autores. O segundo sistema, é apresentado por Rattan no artigo em que enuncia o seu método [14]. Todos os métodos de discretização em malha fechada que apresentamos, utilizam nos seus testes, os sistemas que acabamos de apresentar. Rattan, apresenta o sistema 1. Kennedy e Evans, efectuam os testes do seu algoritmo com o sistema de Katz. Keller e Anderson efectuam testes com os dois sistemas. Finalmente Blackmore, Williamson e Mareels utilizam o sistema proposto por Katz.

Era nosso propósito testar todos os métodos apresentados, nomeadamente os métodos em malha fechada, com o sistema de Grenoble. Efectivamente a complexidade deste sistema garantia um estudo bastante válido, capaz de mostrar os pontos fortes e fracos dos vários métodos. Para que isso pudesse ser realizado, no entanto, tornava-se necessário implementar os algoritmos propostos e aplicar esse algoritmos ao sistema referido. Esta tarefa foi impossível de realizar, devido à falta de informação que por vezes acompanha a implementação de alguns dos passos do algoritmo.

Podemos contudo referir, que o método de Rattan foi implementado totalmente. Acontece que num dos passos do método, é realizada uma integração definida entre dois limites chamados γ_1 e γ_2 . Uma vez que o autor nunca refere como se devem determinar esses limites, tornou-se impossível obter resultados válidos com o algoritmo implementado, apesar de diversos testes terem sido realizados. Para os restantes 3 métodos, não dispunhamos de ferramentas que nos permitissem implementá-los.

¹ Na realidade, o exemplo é devido a dois israelitas referenciados por Paul Katz. Esses israelitas são Avner Ben-Zwi e Preiszler, que apresentaram o trabalho a que se refere Katz, no artigo "Comparison of Discretization Methods" Rafael, Israel MOD, 1979. Não foi possível aceder a este artigo, De qualquer forma o mesmo é referido por Katz como estando escrito em hebreu

Face ao exposto, a metodologia de testes adoptada foi a seguinte.

Os métodos de malha aberta podem ser testados em todos os exemplos. Existem no entanto alguns métodos¹ que, pela complexidade envolvida, que aumenta consideravelmente, com a ordem do controlador a discretizar desaconselham a sua utilização em controladores de ordem elevada. Por este motivo, estes métodos de malha aberta, serão testados essencialmente com os sistemas propostos por Katz e Rattan, podendo nalguns casos ser estendidos os testes ao sistema de Grenoble.

Os testes aos métodos em malha fechada, serão realizados exclusivamente sobre os sistemas de Katz e Rattan, uma vez que nos foi impossível utilizar estes métodos para obter a discretização do sistema de Grenoble.

Por último, o algoritmo de aproximação logarítmica, será testado em todos os exemplos.

Os testes, incidiram essencialmente na comparação das respostas ao degrau e das respostas em frequência dos sistemas contínuo e discreto. No caso do sistema de Grenoble, foram efectuados testes, nas 3 situações de carga possíveis, ou seja, vazio, meia carga e plena carga.

Utilizamos, nos testes, e como já foi referido, os 3 sistemas que descrevemos. Todos os testes tiveram como suporte o software Matlab, utilizando também o Simulink. As respostas em frequência, bem como os valores de margem de ganho e de fase, foram calculados no Matlab. As respostas ao degrau foram calculadas quer através do Matlab quer através do Simulink.

Apresentamos a seguir as funções de transferência dos três sistemas discretizados segundo os diversos métodos em malha aberta apresentados. Uma vez que iremos lidar com bastantes funções de transferência, adoptamos uma nomenclatura que permite evitar algumas confusões. Todas as funções discretizadas têm como nome a letra C, com dois índices. O primeiro índice indicará o método que foi utilizado, de acordo com a seguinte tabela:

¹ Nomeadamente os métodos de Boxer Thaler e Madwed Truxal

tabela 6.1

Método	Índice
Euler	e
Diferencial	d
Tustin	t
Boxer Thaler	b
Madwed Truxal	t
Invariante ao degrau ¹	s ²
Mapeamento de pólos e zeros	m
Algoritmo de aproximação logarítmica	p
Rattan	r
Kennedy e Evans	k
Keller e Anderson	a
Blackmore, Williamson e Mareels	w

O segundo índice indicará o sistema a que se refere a discretização, como se indica também na tabela que se segue:

tabela 6.2

Sistema	Índice
Katz	k
Rattan	r
Grenoble	g

Note-se aqui a ausência do método dos Elementos Retentores. Ele no entanto está presente porque, no caso de se usar o retentor de ordem zero, que seria o utilizado, produz um resultado idêntico ao método da Resposta Invariante ao Degrau, sendo este último objecto de estudo neste capítulo.

¹ No método da resposta invariante, iremos apresentar só o caso da resposta invariante ao degrau

² Neste índice optamos pela letra s, por ser a primeira letra de "step".

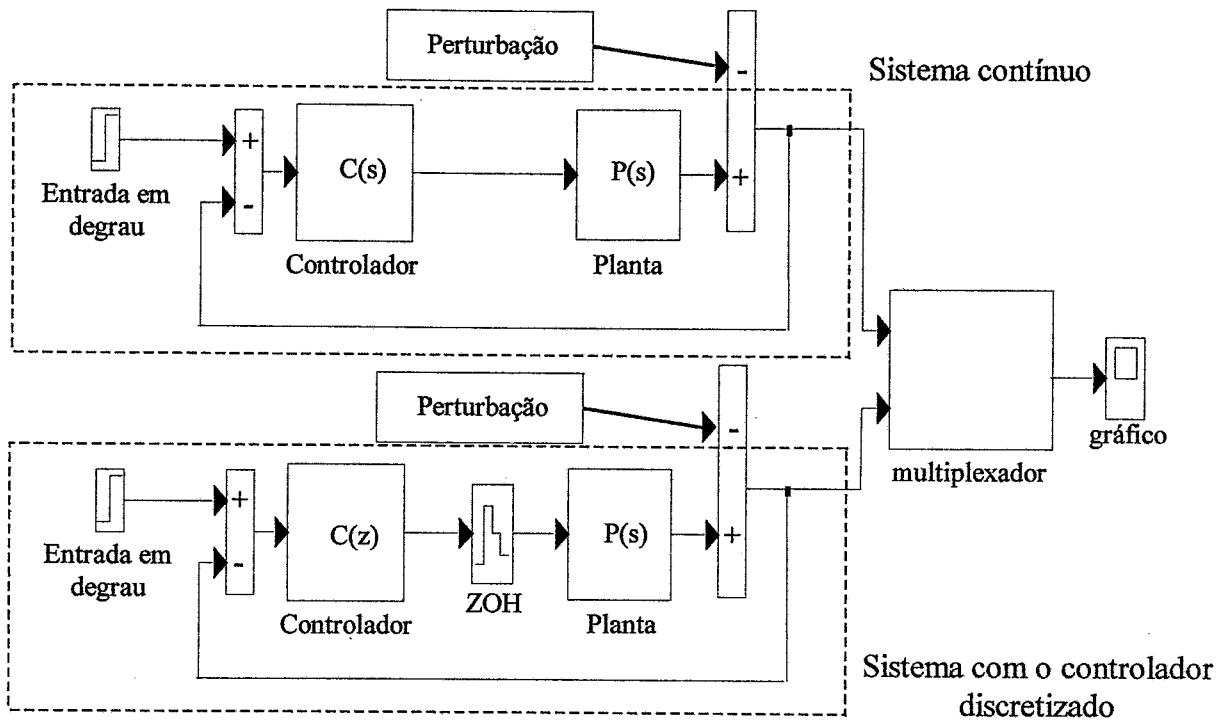
Caberá também referir que, como norma na apresentação dos diagramas de Bode dos vários sistemas, consideramos como frequência máxima, a frequência de Nyquist. Em vez de sobrecarregar um diagrama com as respostas de muitos sistemas com o intuito de os comparar, optamos por, para cada método, apresentar um diagrama, com as respostas do sistema contínuo e do mesmo sistema discretizado por esse mesmo método. A comparação entre métodos, terá que ser feita usando as respostas que se encontram em figuras diferentes.

Torna-se mais fácil, em face do software utilizado, apresentar os diagramas de Bode separados por diagramas de amplitude e de fase. Também por facilidade, não apresentamos em cada gráfico, as unidades dos eixos dos xx e dos yy. Essas unidades são, nos diagramas de amplitude, rads^{-1} no eixo dos xx e dB no eixo dos yy. Nos diagramas de fase, temos graus no eixo dos yy e rads^{-1} no eixo dos xx. Nas respostas ao degrau, temos obviamente o tempo no eixo dos xx e o valor da saída dos sistemas, no eixo dos yy.

A comparação de resultados será feita á medida que os mesmos vão sendo apresentados sendo completada no final da apresentação de todos os resultados.

A discretização de cada sistema será seguida dos resultados que a mesma produziu, comparando-se, como foi dito, as respostas em frequência e as respostas ao degrau. Na obtenção das respostas ao degrau, utilizaremos o sistema desenvolvido em Simulink, que apresentamos na figura 6.4.

A perturbação apresentada na figura, corresponde a um degrau de duração de 0.5 segundos, introduzido depois de a saída ter estabilizado em relação ao degrau inicial. Para visualizar o efeito da perturbação nos dois sistemas, ela é introduzida em instantes diferentes num e noutro. No exemplo de Katz, a perturbação do sistema contínuo é feita em ao fim de um 1s, enquanto que no discreto, é ao fim de 2s. No exemplo de Rattan, estes tempos passam para 4,5s e 6s, respectivamente. Por fim, no exemplo de Grenoble, o sistema contínuo é perturbado aos 6s e o discreto aos 10s. Consegue-se assim verificar, a maior ou menor capacidade de reacção a este tipo de perturbação, dos vários sistemas.



Estrutura do programa em Simulink usado para obter a comparação das respostas ao degrau

6.3 - DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE KATZ

Relembremos o sistema proposto por Paul Katz.

Planta	Controlador
$G(s) = \frac{863.3}{s^2}$	$C(s) = \frac{2940s + 86436}{(s + 294)^2}$

Seguidamente apresentamos a discretização deste sistema utilizando o período de amostragem $T = 0.030s^1$. Podemos ver em [9], que a largura de banda deste sistema é de aproximadamente 8Hz. Como a frequência de amostragem é 33,33Hz, não se cumpre aqui a regra enunciada no final do ponto 7 do capítulo 2. Refere-se nesse ponto que, como regra, devemos ter uma frequência de amostragem, no mínimo, 10 vezes superior à largura de banda do sistema. O facto de não cumprirmos esta regra é, decerto, responsável pela instabilidade que alguns métodos em malha aberta, que normalmente

produzem sistemas discretos estáveis, apresentam.

Nem sempre os métodos de discretização preservam o ganho DC do sistema inicial. Na apresentação dos diversos resultados, optamos por apresentar os resultados que o método produz, colocando à parte o ganho necessário para igualar o valor do ganho DC do sistema discreto, com o valor do sistema contínuo.

6.3.1 - Discretização pelo método de Euler

$$C_{ek}(z) = \frac{8.2z - 10.4076}{z^2 + 15.64z + 61.1524} \quad (6.8)$$

Este método transforma o controlador contínuo, num controlador discreto com função de transferência instável. Uma vez que o objectivo deste trabalho se debruça mais sobre a comparação dos resultados, do que sobre os motivos que levam um ou outro método a causar instabilidade, não faremos grandes análises aos casos em que isso aconteça. Neste caso, porém, é fácil constatar que a função dada, possui raízes instáveis.

6.3.2 - Discretização pelo método diferencial

$$C_{dk}(z) = \frac{0.8341z^2 + 0.9146z}{z^2 - 0.20372z + 0.0104} \quad (6.9)$$

Também aqui temos um sistema que fica instável depois da discretização. Esse facto, no entanto, é algo estranho neste método, uma vez que, à partida, o mesmo garante estabilidade², pelo mapeamento entre os planos s e z que impõe. O alto valor para o tempo de amostragem pode ser a justificação para este resultado

6.3.3 - Discretização pelo método de Tustin

$$C_{tk}(z) = \frac{2.1712z^2 + 1.3290z - 0.8423}{z^2 + 1.2606z + 0.3973} \quad (6.10)$$

¹ Este é o período de amostragem proposto pelo autor.

² Esta estabilidade garantida, é somente em malha aberta.

Este método tem um comportamento razoável, como seria de esperar. Mantendo as margens de ganho e de fase do sistema original, tem uma resposta em frequência relativamente próxima do sistema contínuo. A resposta ao degrau, apesar de um regime transitório bastante oscilatório, com um overshoot considerável, é estável, mesmo que seja com um tempo de estabelecimento cerca do dobro do sistema contínuo. Também aqui, a redução do tempo de amostragem traria resultados, certamente melhores.

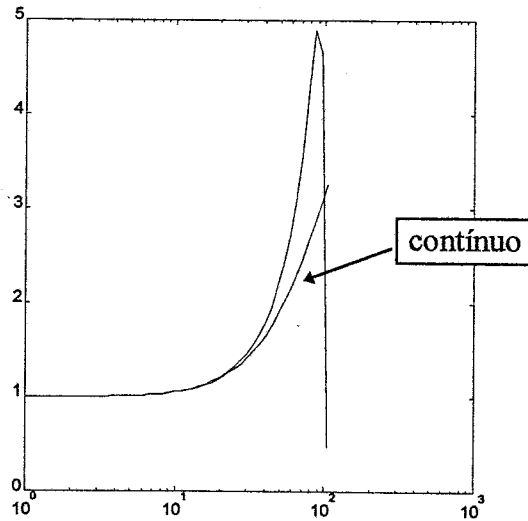


figura 6.5 - diagramas de amplitude

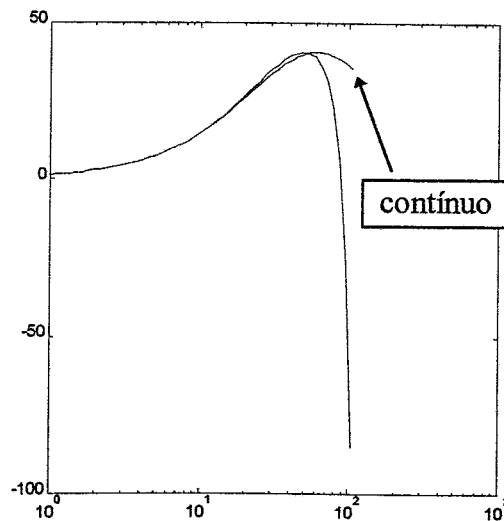


figura 6.6 - diagramas de fase

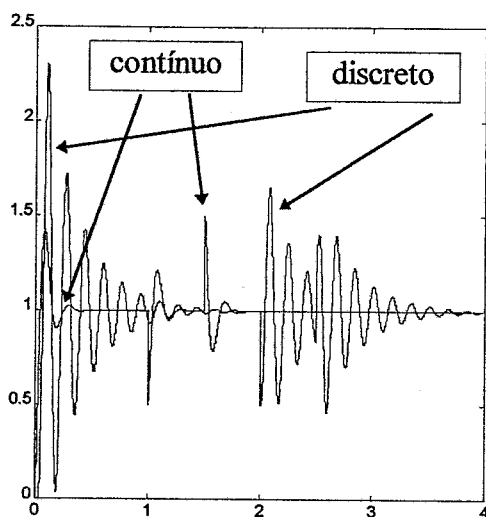


figura 6.7 - resposta ao degrau

6.3.4 - Discretização pelo método de Boxer Thaler

$$C_{bk}(z) = \frac{1.0004z^2 - 1.9998z + 0.9994}{z^2 - 1.9998z + 0.9998} \quad (6.11)$$

Este método, como o próximo, produziu um controlador com função de transferência instável. De facto, os zeros e os pólos encontram-se muito próximos uns dos outros e no limiar do círculo unitário.

6.3.5 - Discretização pelo método de Madwed Truxal

Se apresentarmos as constante de $C_{tk}(z)$, com apenas 4 dígitos de precisão, temos uma função igual à obtida pelo método de Boxer Thaler.

$$C_{tk}(z) = \frac{1.0004z^2 - 1.9998z + 0.9994}{z^2 - 1.9998z + 0.9998} \quad (6.12)$$

6.3.6 - Discretização pelo método da resposta invariante ao degrau

$$C_{sk}(z) = \frac{1.0116z - 0.0119}{z^2 - 0.0003} \quad (6.13)$$

Este método, provoca uma margem de ganho negativa no sistema em malha fechada, tornando-o instável.

6.3.7 - Discretização pelo método de mapeamento de pólos e zeros.

$$C_{mk}(z) = \frac{1.7058z - 0.7061}{z^2 - 0.0003z + 2.183 \cdot 10^{-8}} \quad (6.14)$$

Neste caso, também acontece instabilidade do sistema discreto em malha fechada, apesar de não haver introdução de raízes instáveis pelo controlador.

Nestes quatro últimos métodos, o longo tempo de amostragem, certamente será, em parte, responsável pela instabilidade que todos eles provocam no sistema discreto em malha fechada.

6.3.8 - Discretização pelo Algoritmo de aproximação logarítmica

$$C_{pk}(z) = \frac{2.165z - 0.8181}{z + 0.3469} \quad (6.15)$$

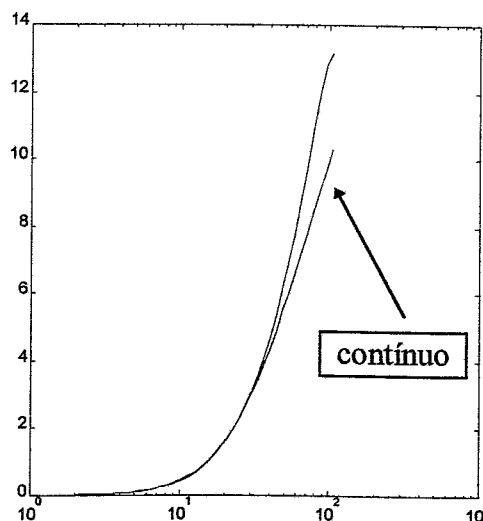


figura 6.8 - diagrama das amplitudes dos dois sistemas

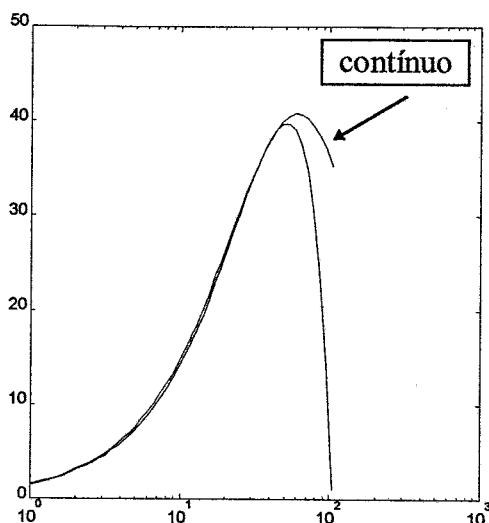


figura 6.9 - diagrama das fases

Quanto às margens de ganho e de fase dos dois controladores, temos que no controlador contínuo a margem de ganho é infinita e a margem de fase é de 101 graus, à frequência de 2910 rads^{-1} . No controlador discreto, quer a margem de ganho quer a margem de fase, são infinitas.

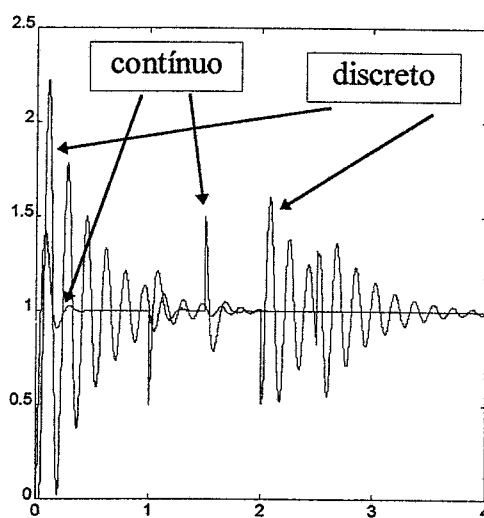


figura 6.10 - respostas ao degrau dos dois sistemas

Neste caso, a discretização com o algoritmo de aproximação logarítmica, apesar de manter, no intervalo de Nyquist, as respostas em frequência bastante semelhantes, provoca um desempenho pior na resposta ao degrau. É claro o maior overshoot do

sistema discreto, bem como a existência de muito mais oscilações. A redução do tempo de amostragem, bem como a utilização de um limiar de detecção de raízes no algoritmo, mais pequeno certamente traria melhor desempenho a este método.

6.3.9 - Discretização de Rattan

Este sistema não foi discretizado por Rattan.

6.3.10 - Discretização de Kennedy e Evans

Estes autores aplicaram o seu método a este sistema, obtendo o seguinte resultado, que lembramos, tem a implementação apresentada na figura 2 do capítulo “Discretização em Malha Fechada”. Temos então:

$$R(z) = z^2 + 1.1773z + 0.7418 \quad (6.16)$$

$$S(z) = 2.6403z - 1.8714 \quad (6.17)$$

$$T(z) = 1.3084z^2 - 0.5390z - 0.0007 \quad (6.18)$$

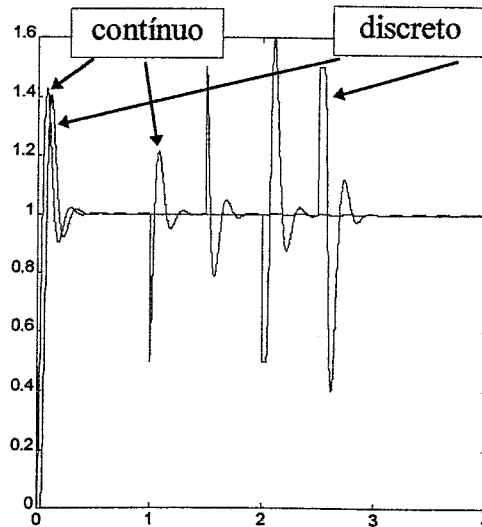


figura 6.11 - resposta ao degrau

Este método, por ser em malha fechada, tem um desempenho nitidamente superior a todos os outros apresentados. A diferença entre as respostas do sistema discretizado e

do sistema contínuo, resume-se praticamente a um atraso do primeiro relativamente ao segundo. Esse atraso, é bastante pequeno, se comparado com o período de amostragem. Por ser implementado na forma RST, não apresentamos a resposta em frequência do controlador.

6.3.11 - Discretização de Keller e Anderson

A função de transferência obtido por este método, é a seguinte:

$$C_{ak}(z) = \frac{1.411z^2 - 0.8611z - 0.09555}{z^2 + 0.2837z + 0.01859} \quad (6.19)$$

De modo semelhante ao método anterior, também este apresenta resultados bastante satisfatórios. Vejamos as respostas em frequência e a resposta ao degrau.

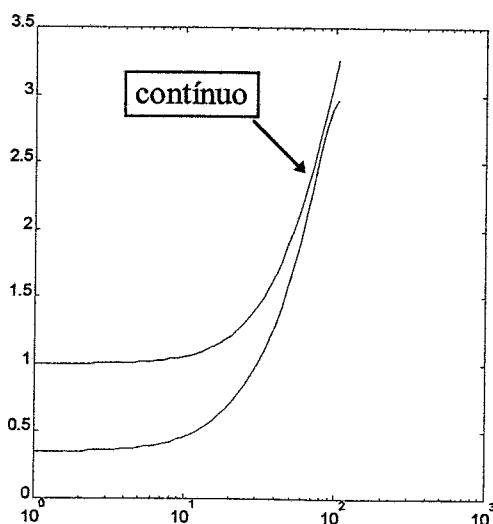


figura 6.12 - diagramas de amplitude

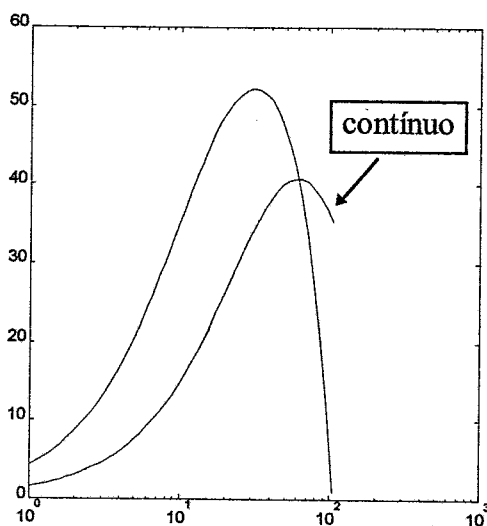


figura 6.13 - diagramas de fase

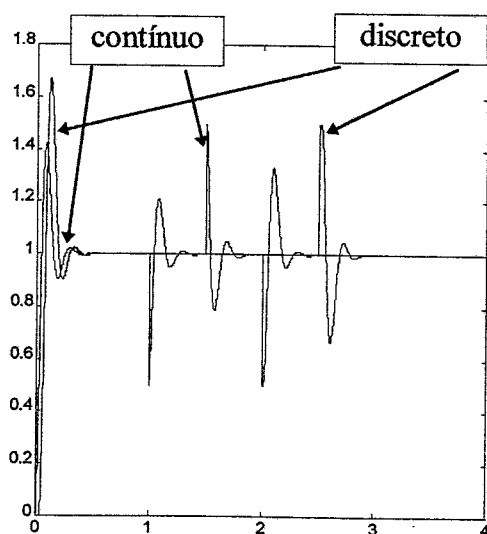


figura 6.14 - resposta ao degrau

Neste caso, apesar de os diagramas de amplitude e fase diferirem um pouco relativamente ao sistema contínuo temos, como foi referido, uma resposta ao degrau satisfatória, ainda que com um overshoot pior que o da resposta obtida por Kennedy e Evans.

6.3.12 - Discretização de Blackmore, Williamson e Mareels

Este método fornece o seguinte resultado:

$$C_{wk}(z) = \frac{1.511z^2 - 2.160z + 0.609}{z^2 - 0.225z - 0.306} \quad (6.20)$$

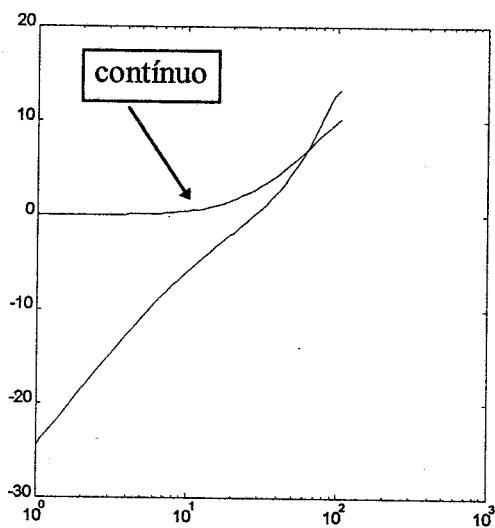


figura 6.15 - diagramas de amplitude

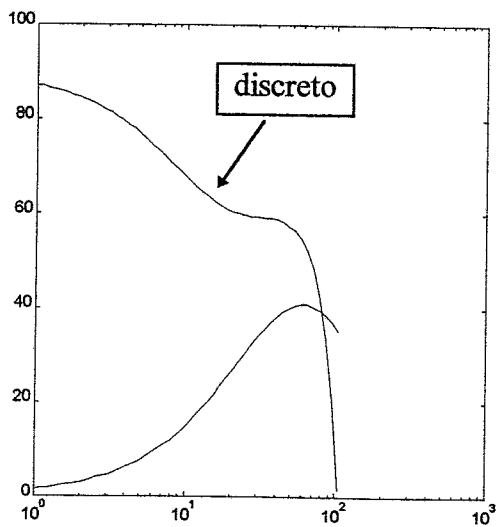


figura 6.16 - diagramas de fase

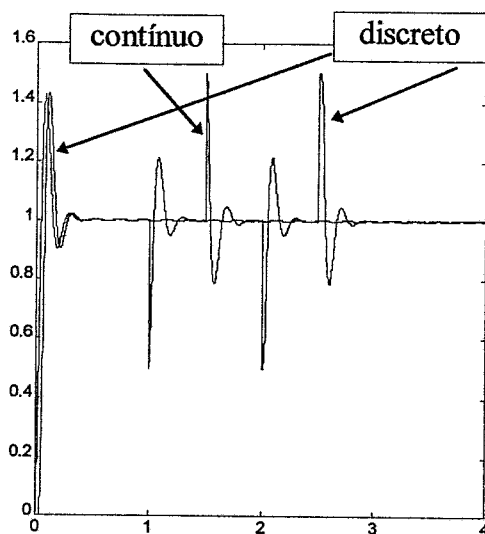


figura 6.17 - resposta ao degrau

Em termos de desempenho, este método comporta-se de forma semelhante ao anterior. De facto, em ambos os casos, as respostas em frequência dos sistemas contínuo e discreto, são bastante diferentes, conseguindo o método respostas ao degrau bastante próximas da do sistema contínuo.

Este método estará entre o de Kennedy e o de Keller, no que diz respeito ao desempenho na resposta ao degrau. Do mesmo modo que esses dois, a resposta do sistema discreto apresenta um atraso, não muito significativo em termos do período de amostragem.

Em todas as respostas ao degrau apresentadas neste método, podemos observar que existe uma reacção, à perturbação introduzida na saída. Essa reacção é bastante pior nos métodos em malha aberta. Mesmo o método de aproximação logarítmica tem, neste ponto, um desempenho bastante fraco. Nos métodos em malha fechada, o pico de reacção à perturbação é bastante elevado, mas essa perturbação é anulada muito mais rapidamente do que nos métodos de malha aberta.

6.4 - DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE RATTAN

Rattan apresentou o seguinte sistema

Planta	Controlador
$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$	$C(s) = \frac{0.416s+1}{0.139s+1}$

Este sistema é bastante mais simples do que o apresentado por Katz.. Neste caso, certamente os diversos métodos apresentam desempenhos mais próximos uns dos outros. O período de amostragem a utilizar neste caso é $T = 0.15$.

As margens de ganho e de fase do controlador contínuo, são ambas infinito. Este factor, devido talvez á simplicidade do sistema, é mantido por todos os métodos. Só o método da resposta invariante, produz uma resposta instável. Neste caso, a frequência de amostragem proposta por Rattan, cumpre os limites enunciados no ponto 7 do capítulo 2. De facto, a largura de banda do sistema em malha fechada ronda os 0.6Hz. Como a frequência de amostragem é de 6.66Hz, estamos no limiar mínimo de 10 vezes a largura de banda.

6.4.1 - Discretização pelo método de Euler

$$C_{er}(z) = \frac{2.993z - 1.8635}{z + 0.1295} \quad (6.21)$$

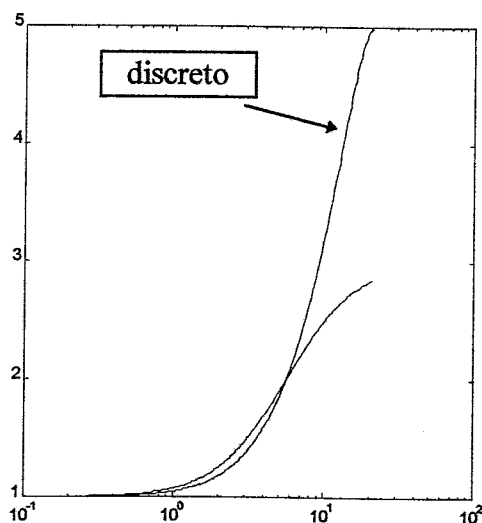


figura 6.18 - diagramas de amplitude

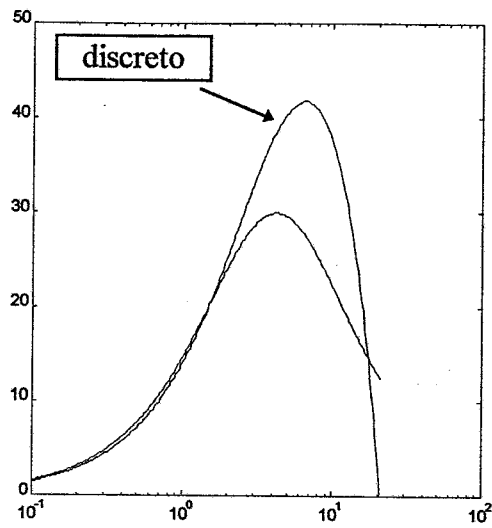


figura 6.19 - diagrama de fases

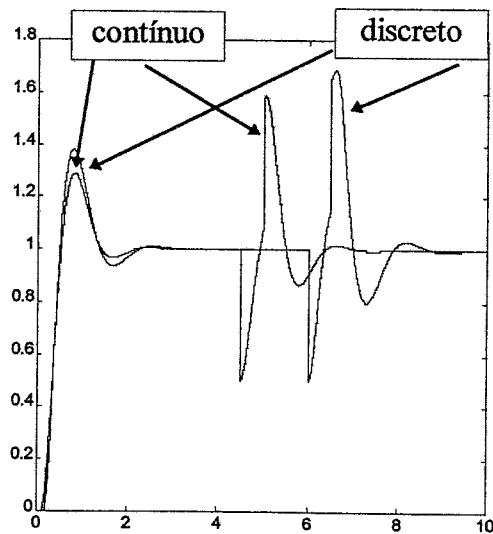


figura 6.20 - resposta ao degrau

Os diagramas de amplitude e de fase, apresentam algumas diferenças apreciáveis. Na resposta ao degrau, a resposta mantém-se estável mas perde qualidade, apresentando um overshoot bastante maior no sistema discreto.

6.4.2 - Discretização pelo método diferencial

$$C_{dr}(z) = \frac{1.9359z + 1.4055}{z - 0.4696} \quad (6.22)$$

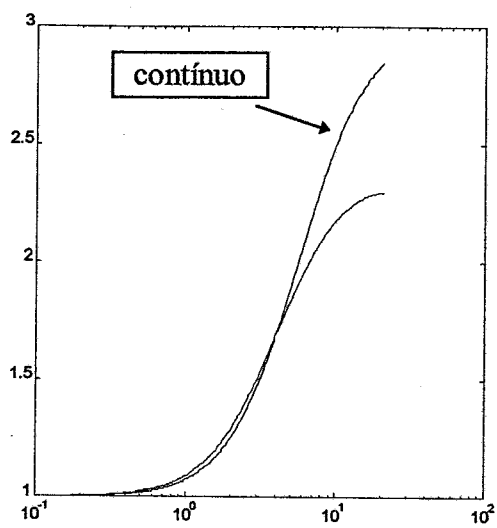


figura 6.21 -diagrama de amplitudes

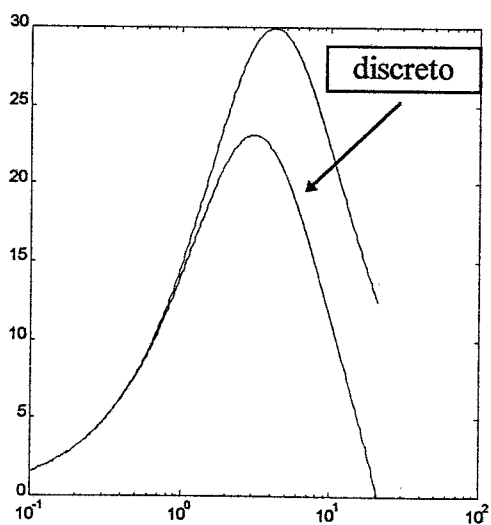


figura 6.22 - diagrama de fase

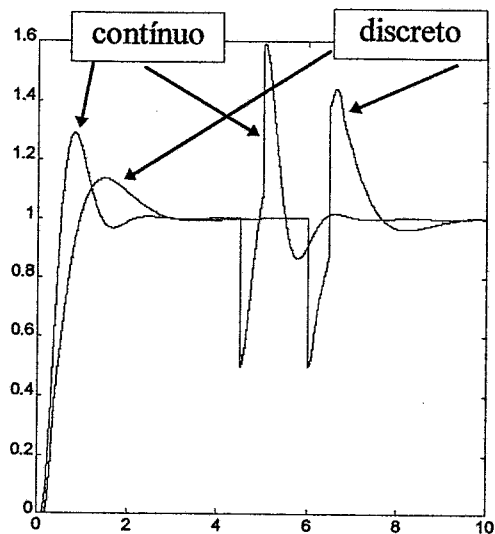


figura 6.23 - resposta ao degrau

Este método tem, a todos os níveis, um desempenho pior, relativamente ao método anterior.

6.4.3 - Discretização pelo método de Tustin

$$C_{tr}(z) = \frac{2.2944z - 1.3559}{z - 0.2991} \quad (6.23)$$

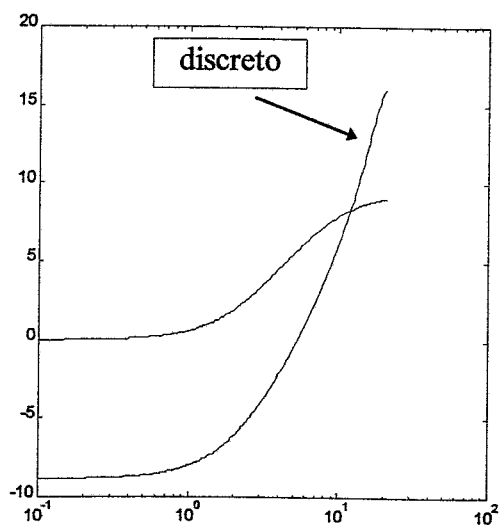


figura 6.24 - diagrama de amplitudes

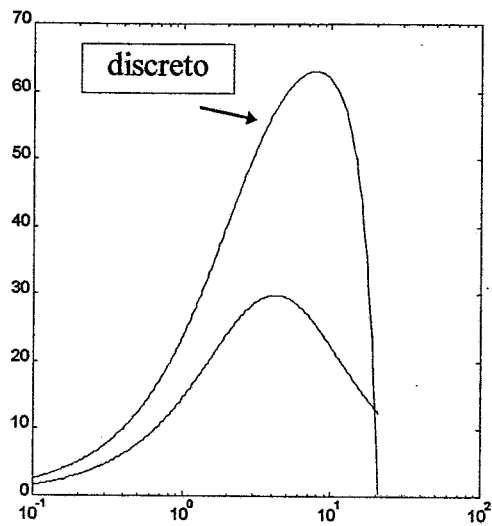


figura 6.25 - diagrama de fase

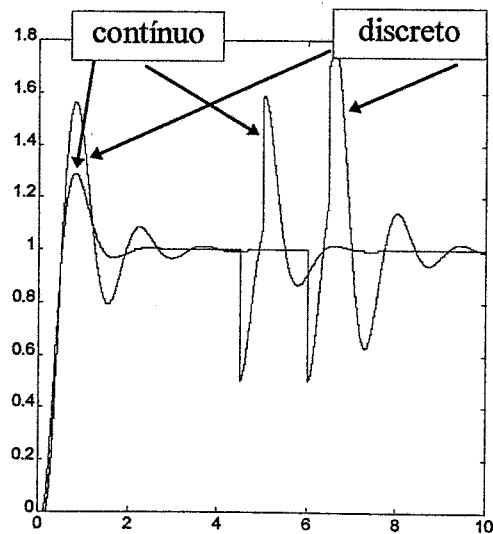


figura 6.26 - resposta ao degrau

Apesar de, os sistemas discreto e contínuo, nestes caso, apresentarem respostas em frequência muito similares, temos uma resposta ao degrau do sistema discreto, pior do que o método de Euler, que apresenta diagramas de amplitude e fase menos similares, quando comparados com o presente método.

6.4.4 - Discretização pelo método de Boxer Thaler

Uma vez que a função a discretizar é de ordem 1, os métodos de Boxer Thaler e Madwed Truxal, produzirão os mesmos resultados que o método de Tustin.

$$C_{br}(z) = \frac{2.2944z - 1.3559}{z - 0.2991} \quad (6.24)$$

6.4.5 - Discretização pelo método de Madwed Truxal

$$C_{\pi}(z) = \frac{2.2944z - 1.3559}{z - 0.2991} \quad (6.25)$$

6.4.6 - Discretização pelo método da resposta invariante ao degrau

$$C_{sr}(z) = \frac{2.9928z - 2.3327}{z - 0.3399} \quad (6.26)$$

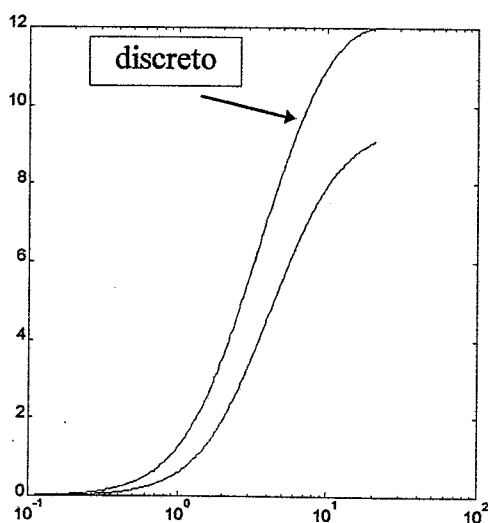


figura 6.27 - diagrama de amplitudes

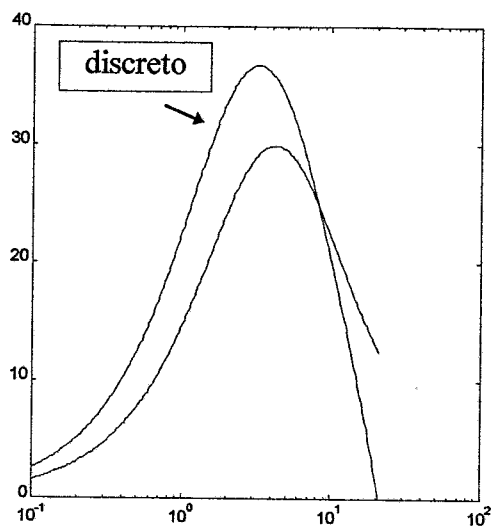


figura 6.28 - diagrama de fases

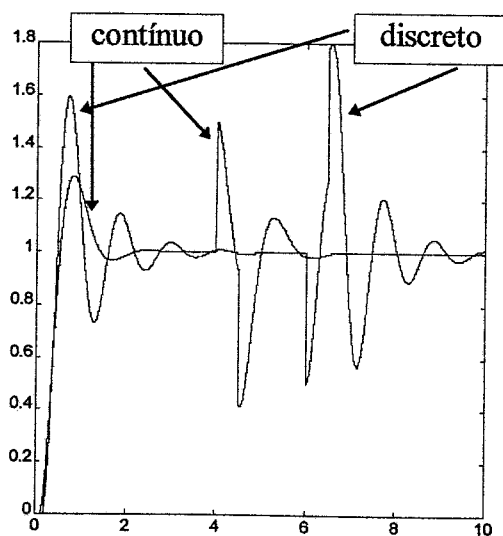


figura 6.29 - resposta ao degrau

6.4.7 - Discretização pelo método de mapeamento de pólos e zeros.

$$C_{mr}(z) = \frac{2.1806z - 1.5204}{z - 0.3399} \quad (6.27)$$

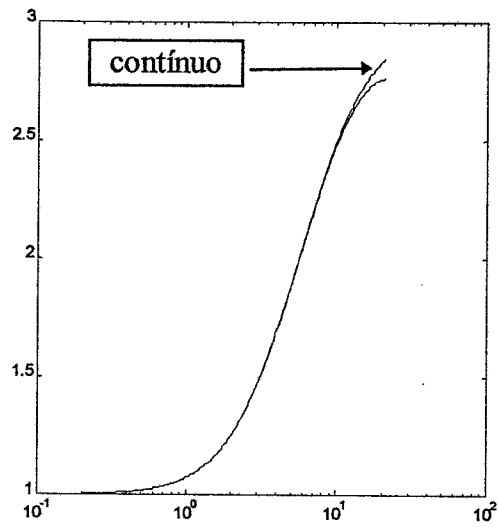


figura 6.30 - diagramas de amplitude

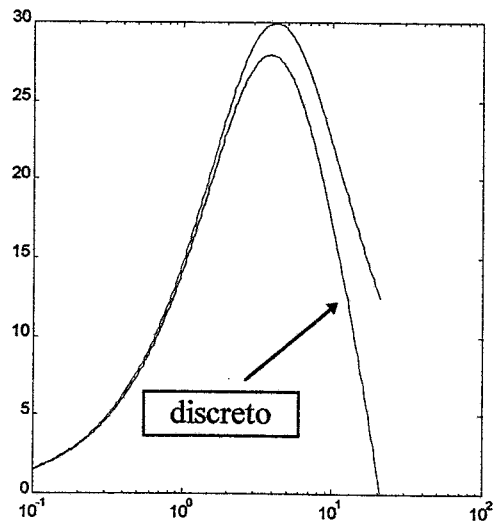


figura 6.31 - diagramas de fase

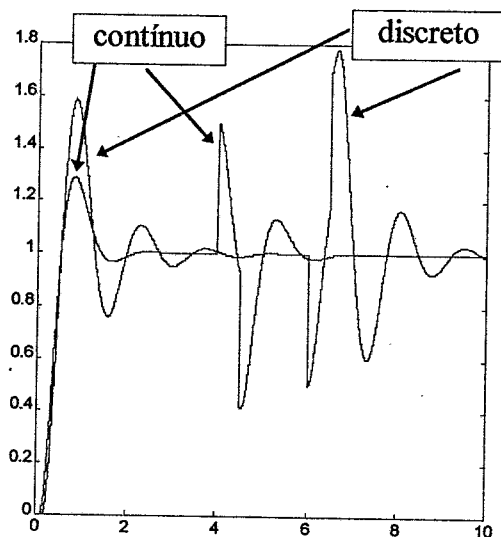


figura 6.32 - resposta ao degrau

Este método, tem um desempenho muito similar ao método de Tustin. Os diagramas de amplitude e de fase, dos sistemas contínuo e discreto são muito parecidos, existindo no entanto uma diferença considerável, com uma clara perda de desempenho do sistema discreto, relativamente ao contínuo.

6.4.8 - Discretização pelo Algoritmo de aproximação logarítmica

$$C_{pk}(z) = \frac{2.5297z - 1.6131}{z - 0.0836} \quad (6.28)$$

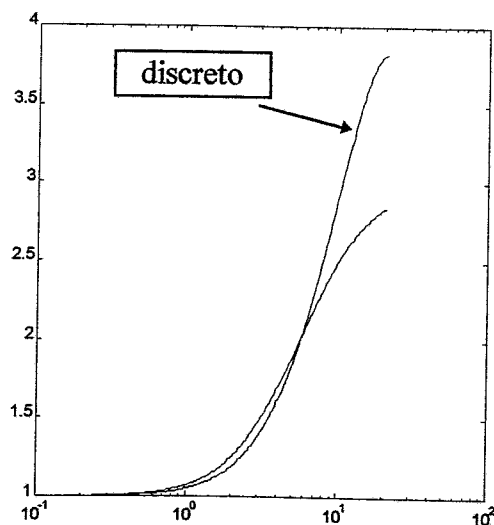


figura 6.33 - diagramas de amplitudes

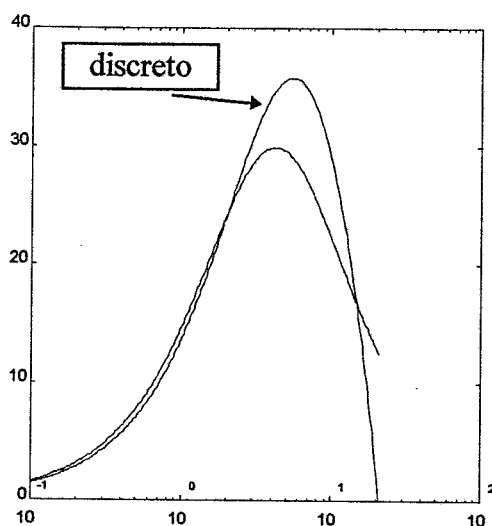


figura 6.34 - diagramas de fase

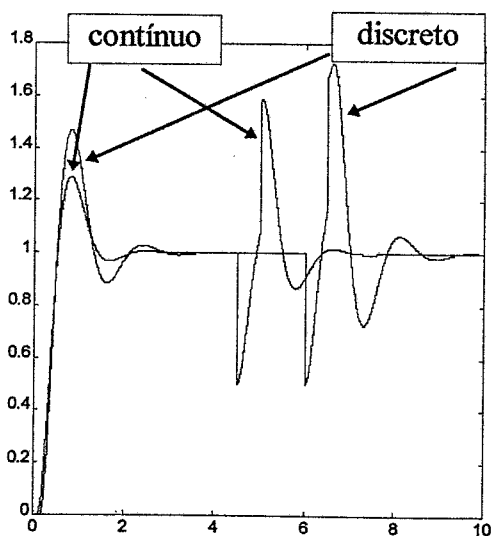


figura 6.35 - resposta ao degrau

Este algoritmo, apesar de tentar uma equivalência entre as respostas em frequência do sistema contínuo e discreto, não obtém neste exemplo, resultados bons a esse nível. São de facto visíveis as diferenças entre os diagramas e amplitude e fase deste sistema. Seria necessário reduzir o limiar de detecção de raízes, na aplicação do método, apesar de isso ter como resultado um aumento da ordem do modelo. Na resposta ao degrau, consegue um desempenho que só é pior que o método de Euler.

6.4.9 - Discretização de Rattan

$$C_{\pi}(z) = \frac{3.436z - 2.191}{z - 0.239} \quad (6.29)$$

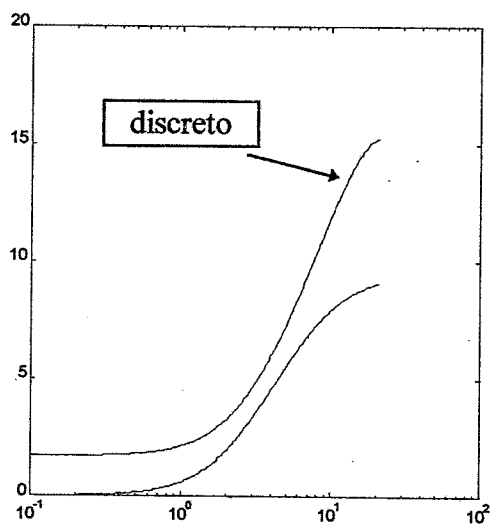


figura 6.36 - diagrama de amplitudes

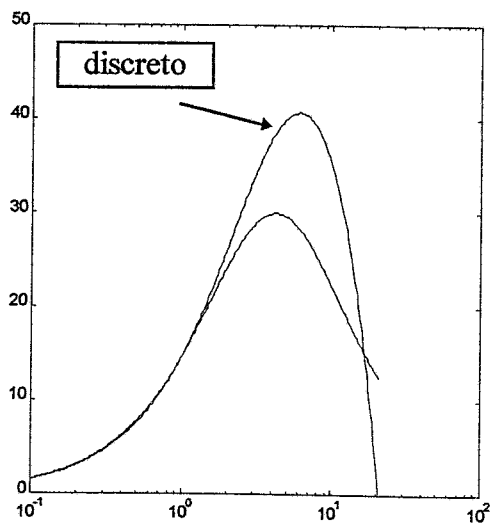


figura 6.37 - diagrama de fases

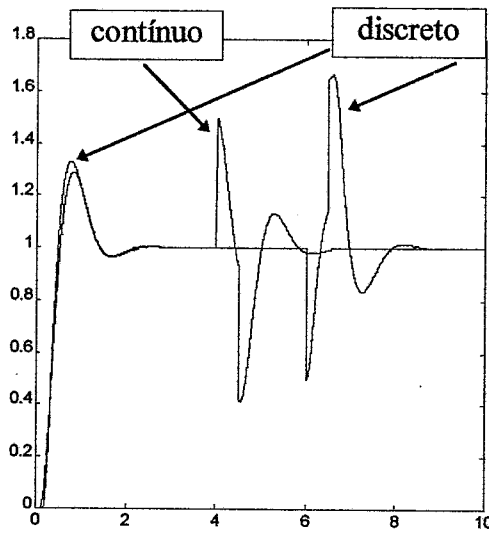


figura 6.38 - resposta ao degrau

O desempenho apresentado por este método, não nos parece muito satisfatório. Uma vez que é um método em malha fechada, que se apresenta como tentando igualar as respostas em frequência devia apresentar resultados, a esse nível, melhores que os métodos anteriores. Talvez, à semelhança do método anterior, as suas qualidades só se notem em sistemas mais complexos. Infelizmente, como foi já referido anteriormente, não nos foi possível implementar este método, pelo que não é possível testar o seu desempenho na discretização de outros controladores mais complexos.

6.4.10 - Discretização de Kennedy e Evans

Kennedy e Evans não efectuam a discretização do sistema proposto por Rattan

6.4.11 - Discretização de Keller e Anderson

Estes autores, apresentam uma discretização do sistema de Rattan, a uma frequência de amostragem um pouco diferente da usada pelos outros métodos. Neste caso foi utilizado $T = 0.157$. O resultado foi o seguinte:

$$C_{ar}(z) = \frac{2.8926z^2 - 1.5640z - 0.3447}{z^2 + 0.2883z + 0.0047} \quad (6.30)$$

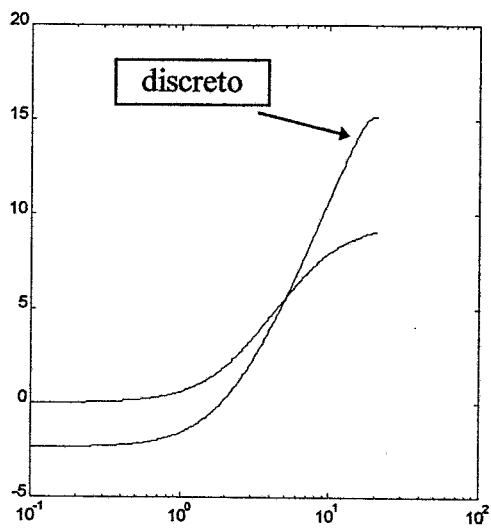


figura 6.39 - diagrama de amplitudes

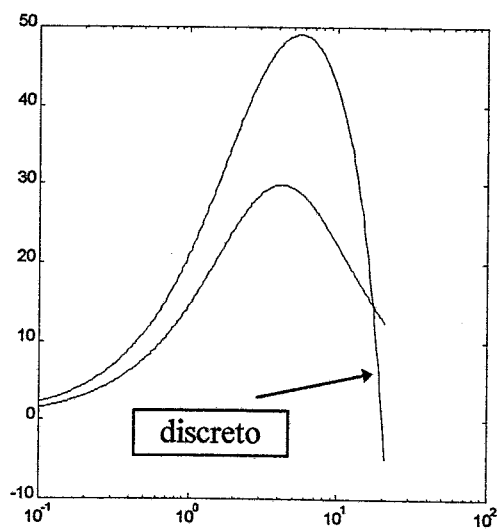


figura 6.40 - diagrama de fases

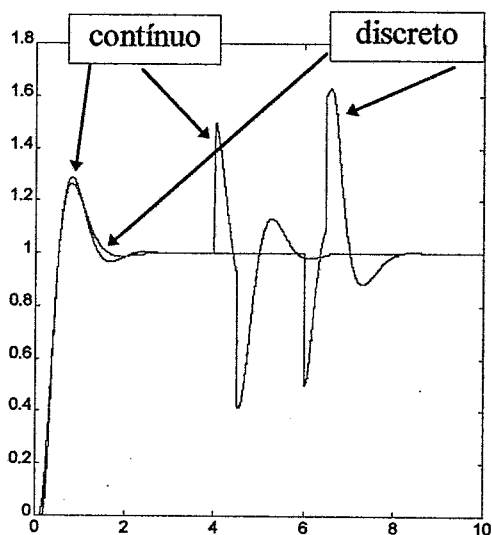


figura 6.41 - resposta ao degrau

Este método produz uma resposta ao degrau praticamente idêntica à do sistema contínuo. Acontece porém que, a resposta à perturbação é muito pior neste caso que em qualquer dos outros. Este facto indicia que a utilização deste controlador em termos práticos pode ser posta em causa. Não esquecer que se trata de um método em malha fechada.

6.4.12 - Discretização de Blackmore, Williamson e Mareels

Também estes autores não aplicaram o seu método ao sistema de Rattan

A reacção à perturbação neste exemplo, tem um comentário muito parecido ao que foi feito para o exemplo de Katz. Neste caso, contudo, o melhor desempenho que os métodos em malha fechada produzem, traduz-se quase só por um pico menor nessa perturbação

6.5 - DISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE GRENOBLE

O controlador, neste exemplo, é dado pela equação 7, que repetimos aqui:

$$C(s) = \frac{a_9s^9 + a_8s^8 + a_7s^7 + a_6s^6 + a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}{s^9 + b_8s^8 + b_7s^7 + b_6s^6 + b_5s^5 + b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}$$

com

$$a_9 = 2.684 \quad (6.31a)$$

$$a_8 = 473.3; b_8 = 267.5978 \quad (6.31b)$$

$$a_7 = 2.543 \cdot 10^4; b_7 = 3.1524 \cdot 10^4 \quad (6.31c)$$

$$a_6 = 1.1409 \cdot 10^6; b_6 = 2.0484 \cdot 10^6 \quad (6.31d)$$

$$a_5 = 2.4543 \cdot 10^7; b_5 = 7.928 \cdot 10^7 \quad (6.31e)$$

$$a_4 = 3.8265 \cdot 10^8; b_4 = 1.8452 \cdot 10^9 \quad (6.31f)$$

$$a_3 = 2.197 \cdot 10^9; b_3 = 2.7728 \cdot 10^{10} \quad (6.31g)$$

$$a_2 = 1.3849 \cdot 10^{10}; b_2 = 1.9921 \cdot 10^{11} \quad (6.31h)$$

$$a_1 = -4.1079 \cdot 10^{10}; b_1 = 8.9741 \cdot 10^{11} \quad (6.31i)$$

$$a_0 = 9.6116 \cdot 10^{11}; b_0 = 0.0533 \quad (6.31j)$$

Pela complexidade deste controlador, não iremos apresentar a discretização do mesmo pelos métodos de Boxer Thaler e Madwed Truxal. O período de amostragem a utilizar nas discretizações seguintes e $T = 0.05s$, visto que este é o período de amostragem utilizado no controlo real da planta de Grenoble.

6.5.1 - Discretização pelo método de Euler

$$C_{eg}(s) = \frac{a_9z^9 + a_8z^8 + a_7z^7 + a_6z^6 + a_5z^5 + a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0}{z^9 + b_8z^8 + b_7z^7 + b_6z^6 + b_5z^5 + b_4z^4 + b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0}$$

com

$$a_9 = 2.684 \quad (6.32a)$$

$$a_8 = -0.491; b_8 = 4.38 \quad (6.32b)$$

$$a_7 = 29.12; b_7 = 7.771 \quad (6.32c)$$

$$a_6 = 134.8; b_6 = -4.983 \quad (6.32d)$$

$$a_5 = -354.3; b_5 = -9.064 \quad (6.32e)$$

$$a_4 = 585; b_4 = -7.883 \quad (6.32f)$$

$$a_3 = -637; b_3 = 53.83 \quad (6.32g)$$

$$a_2 = 461.5; b_2 = -115 \quad (6.32h)$$

$$a_1 = -207.4; b_1 = 111.9 \quad (6.32i)$$

$$a_0 = 46.18; b_0 = -41.93 \quad (6.32j)$$

Este método, produz resultados instáveis, por introduzir algumas raízes fora do círculo unitário.

6.5.2 - Discretização pelo método diferencial

$$C_{dg}(s) = \frac{a_9Z^9 + a_8Z^8 + a_7Z^7 + a_6Z^6 + a_5Z^5 + a_4Z^4 + a_3Z^3 + a_2Z^2 + a_1Z + a_0}{Z^9 + b_8Z^8 + b_7Z^7 + b_6Z^6 + b_5Z^5 + b_4Z^4 + b_3Z^3 + b_2Z^2 + b_1Z + b_0}$$

com

$$a_9 = 0.2636 \quad (6.33a)$$

$$a_8 = -1.3838; b_8 = -4.4411 \quad (6.33b)$$

$$a_7 = 3.1678; b_7 = 7.5737 \quad (6.33c)$$

$$a_6 = -4.1644; b_6 = -7.8766 \quad (6.33d)$$

$$a_5 = 3.4783; b_5 = 5.1443 \quad (6.33e)$$

$$a_4 = -1.9239; b_4 = -2.1901 \quad (6.33f)$$

$$a_3 = 0.7084; b_3 = 0.6079 \quad (6.33g)$$

$$a_2 = -0.1678; b_2 = -0.1065 \quad (6.33h)$$

$$a_1 = 0.0230; b_1 = 0.0107 \quad (6.33i)$$

$$a_0 = -0.0013; b_0 = -0.0005 \quad (6.33j)$$

Também este método, produz resultados instáveis.

6.5.3 - Discretização pelo método de Tustin

$$C_{tg}(s) = \frac{a_9Z^9 + a_8Z^8 + a_7Z^7 + a_6Z^6 + a_5Z^5 + a_4Z^4 + a_3Z^3 + a_2Z^2 + a_1Z + a_0}{Z^9 + b_8Z^8 + b_7Z^7 + b_6Z^6 + b_5Z^5 + b_4Z^4 + b_3Z^3 + b_2Z^2 + b_1Z + b_0}$$

com

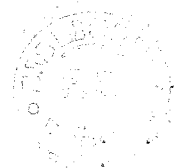
$$a_9 = 0.5337 \quad (6.34a)$$

$$a_8 = -2.092; b_8 = -2.025 \quad (6.34b)$$

$$a_7 = 3.501; b_7 = 1.235 \quad (6.34c)$$

$$a_6 = -3.39; b_6 = -0.1184 \quad (6.34d)$$

$$a_5 = 2.148; b_5 = -0.08588 \quad (6.34e)$$



$$a_4 = -0.7674; b_4 = -0.03914 \quad (6.34f)$$

$$a_3 = -0.1012; b_3 = 0.06095 \quad (6.34g)$$

$$a_2 = 0.319; b_2 = -0.008905 \quad (6.34h)$$

$$a_1 = -0.1755; b_1 = -0.0131 \quad (6.34i)$$

$$a_0 = 0.04107; b_0 = -0.00554 \quad (6.34j)$$

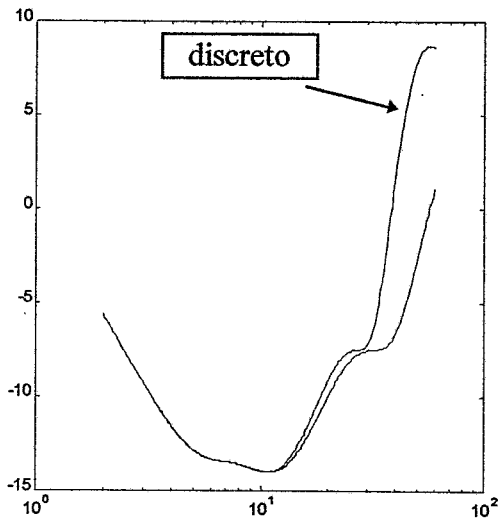


figura 6.42 - diagramas de amplitude

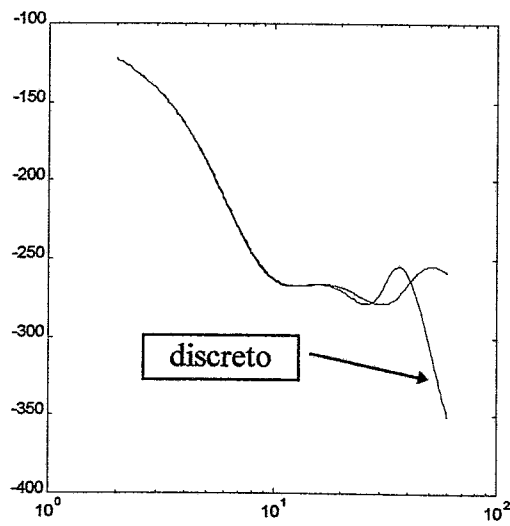


figura 6.43 - diagramas de fase

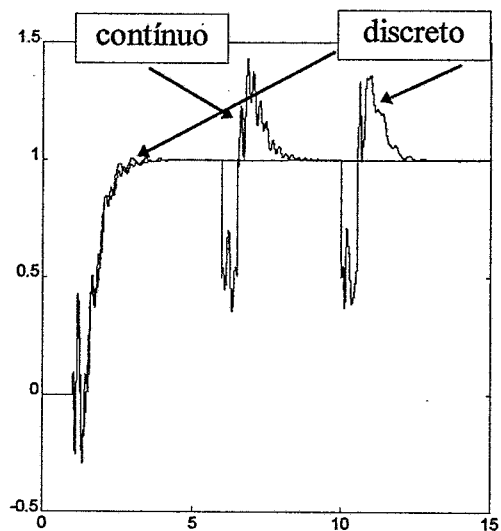


figura 6.44 - resposta ao degrau do sistema vazio

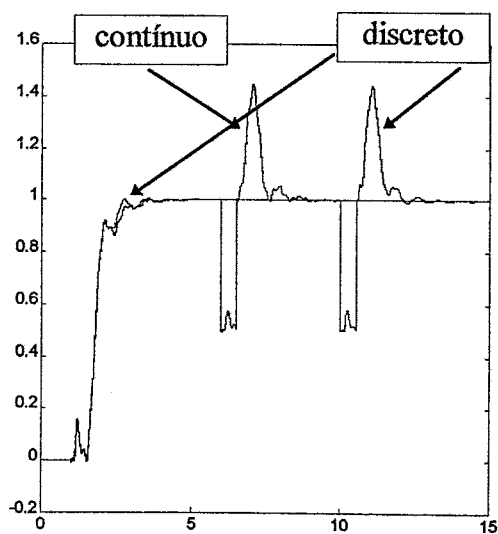


figura 6.45 - resposta ao degrau do sistema com meia carga

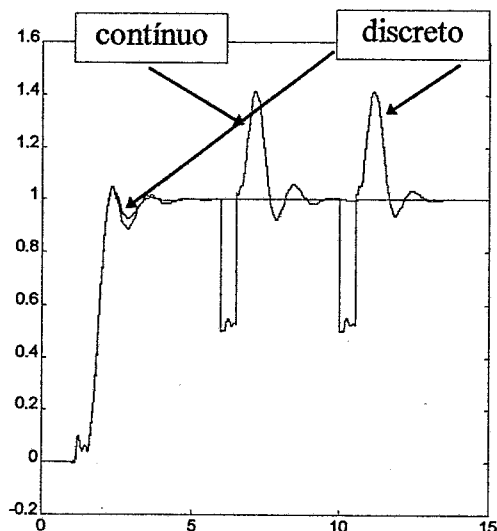


figura 6.46 - resposta ao degrau do sistema com plena carga

Este método produz resultados aceitáveis, quer ao nível da resposta em frequência, quer ao nível das respostas ao degrau nos 3 casos apresentados. A resposta à perturbação é satisfatória, apesar de, naturalmente se deteriorar com o aumento de carga na planta.

6.5.4 - Discretização pelo método da resposta invariante ao degrau

$$C_{sg}(s) = \frac{a_9 Z^9 + a_8 Z^8 + a_7 Z^7 + a_6 Z^6 + a_5 Z^5 + a_4 Z^4 + a_3 Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0}{Z^9 + b_8 Z^8 + b_7 Z^7 + b_6 Z^6 + b_5 Z^5 + b_4 Z^4 + b_3 Z^3 + b_2 Z^2 + b_1 Z + b_0}$$

com

$$a_9 = 2.684 \quad (6.35a)$$

$$a_8 = -10.69; b_8 = -2.9732 \quad (6.35b)$$

$$a_7 = 17.74; b_7 = 3.5992 \quad (6.35c)$$

$$a_6 = -16.12; b_6 = -2.3332 \quad (6.35d)$$

$$a_5 = 8.888; b_5 = 0.8697 \quad (6.35e)$$

$$a_4 = -3.077; b_4 = -0.1603 \quad (6.35f)$$

$$a_3 = 0.6469; b_3 = -0.0007 \quad (6.35g)$$

$$a_2 = -0.08651; b_2 = -0.0016 \quad (6.35h)$$

$$a_1 = 0.01819; b_1 = 0 \quad (6.35i)$$

$$a_0 = -0.0004795; b_0 = 0 \quad (6.35j)$$

Este método produz raízes instáveis.

6.5.5 - Discretização pelo método de mapeamento de pólos e zeros.

$$C_{mg}(s) = \frac{a_9 z^9 + a_8 z^8 + a_7 z^7 + a_6 z^6 + a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{z^9 + b_8 z^8 + b_7 z^7 + b_6 z^6 + b_5 z^5 + b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}$$

com

$$a_9 = 0.2755 \quad (6.36a)$$

$$a_8 = -1.1032; b_8 = -2.9732 \quad (6.36b)$$

$$a_7 = 1.8481; b_7 = 3.5992 \quad (6.36c)$$

$$a_6 = -1.7493; b_6 = -2.3332 \quad (6.36d)$$

$$a_5 = 1.1390; b_5 = 0.8697 \quad (6.36e)$$

$$a_4 = -0.6160; b_4 = -0.1603 \quad (6.36f)$$

$$a_3 = 0.2952; b_3 = -0.0007 \quad (6.36g)$$

$$a_2 = -0.1027; b_2 = -0.0016 \quad (6.36h)$$

$$a_1 = 0.0194; b_1 = 8.6 \cdot 10^{-6} \quad (6.36i)$$

$$a_0 = -4.04 \cdot 10^{-5}; b_0 = -1.54 \cdot 10^{-6} \quad (6.36j)$$

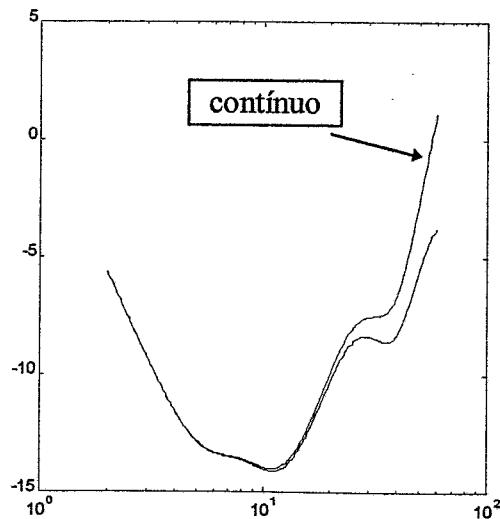


figura 6.47 - diagramas de amplitude

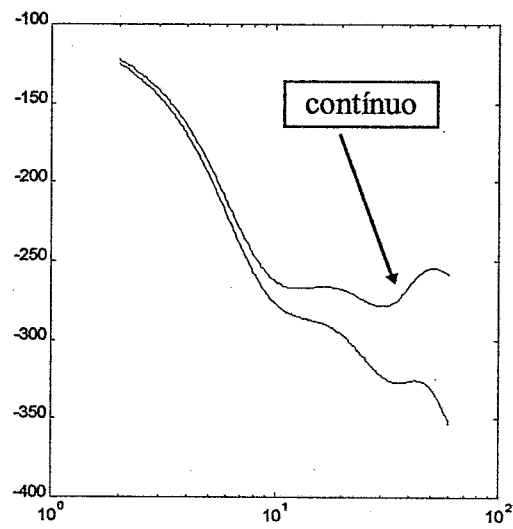


figura 6.48 - diagramas de fase

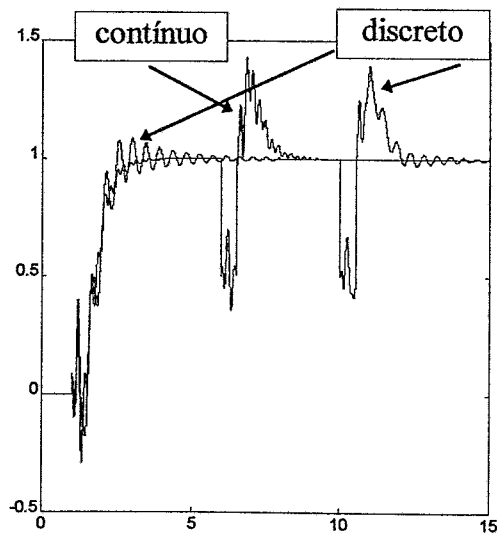


figura 6.49 - resposta ao degrau do sistema vazio

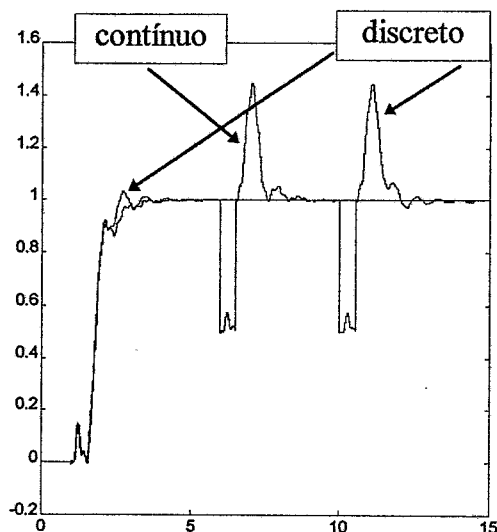


figura 6.50 - resposta ao degrau do sistema com meia carga

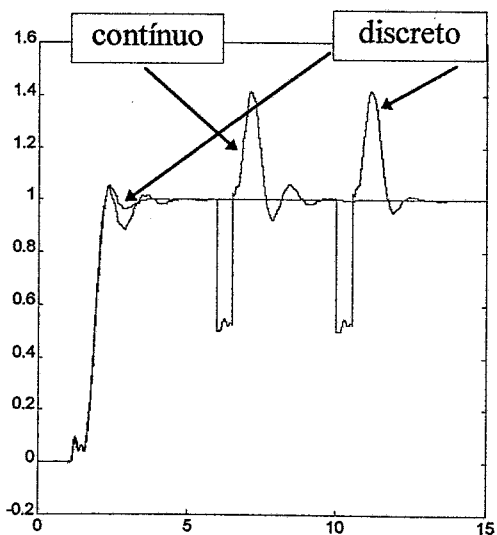


figura 6.51 - resposta ao degrau do sistema com plena carga

Os diagramas de amplitude e fase, são similares aos do método de Tustin, apesar de haver maior discrepância no diagrama de fases no presente método. No que diz respeito às respostas ao degrau, nas plantas vazio e com plena carga, o desempenho é semelhante ao método de Tustin. Na planta vazio total, existe um desempenho claramente pior.

6.5.6 - Discretização pelo Algoritmo de aproximação logarítmica

$$C_{pk}(z) = \frac{0.303z^3 - 0.7163z^2 + 0.3821z + 0.105}{z^3 - 0.4786 - 0.6662z + 0.1448} \quad (6.37)$$

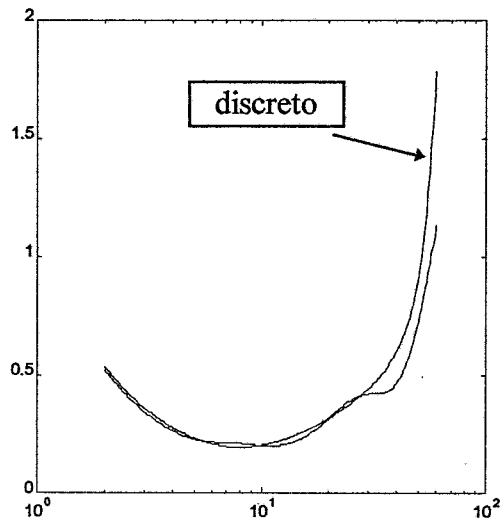


figura 6.52 - diagramas de amplitude

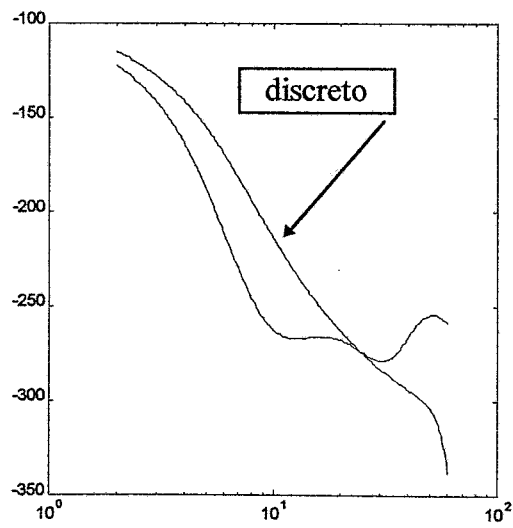


figura 6.53 - diagramas de fase

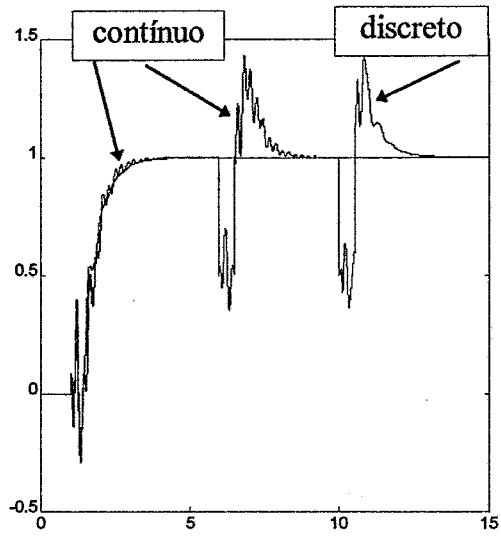


figura 6.54 - resposta ao degrau do sistema vazio

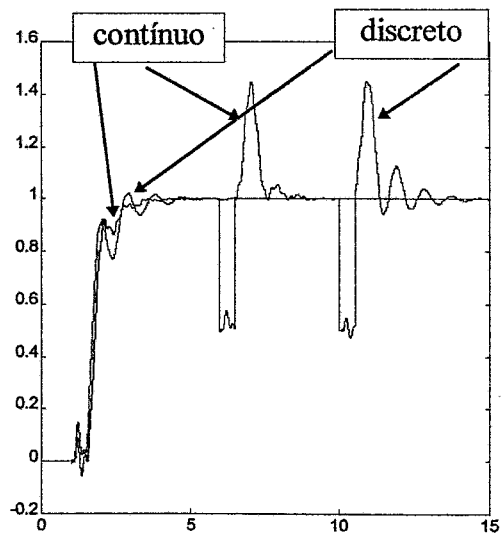


figura 6.55 - resposta ao degrau do sistema com meia carga

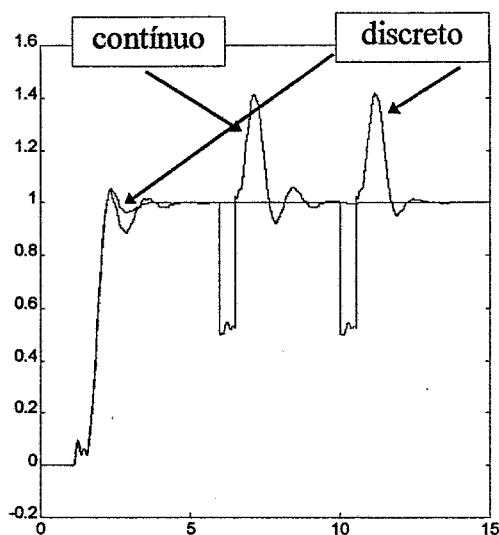


figura 6.56 - resposta ao degrau do sistema com plena carga

Mais uma vez podemos repetir o comentário sobre a reacção à perturbação dos vários controladores.

Um aspecto que todos os métodos apresentam neste exemplo, tem a ver com a existência de uma resposta inversa ao degrau, com picos negativos. Estes picos, no sistema em vazio, atingem valores significativos, sendo o método de mapeamento de pólos e zeros que apresenta o maior pico. O método de aproximação logarítmica, talvez devido à redução de modelo conseguida, não apresenta resultados muito bons neste aspecto, ficando até aquém dos métodos em malha aberta.

6.5 - COMPARAÇÃO GERAL DOS RESULTADOS

A comparação dos resultados tem necessariamente que separar os métodos em malha aberta dos métodos em malha fechada. Ao introduzir este ponto, convém lembrar que o algoritmo de aproximação logarítmica, é de facto um método em malha aberta. Nenhuma informação sobre a planta é utilizada na discretização do controlador. Dado este facto, este é sem dúvida o método que melhor resultado apresenta, ao conseguir com o sistema de Grenoble, um óptimo desempenho, utilizando um controlador de ordem 3, contra o controlador de ordem 9 original. É verdade que nos outros dois sistemas testados, o desempenho deste método não difere muito dos obtidos pelos

restantes métodos de malha aberta, ficando até aquém dos obtidos pelos métodos de malha fechada. Seria realmente interessante, implementar os métodos em malha fechada, e testar os seus resultados com o sistema de Grenoble. Pensamos, contudo, que de acordo com as técnicas utilizadas pelos diferentes métodos, dificilmente os mesmo produzirão controladores discretizados, de grau muito menor que o controlador contínuo. Obviamente que os métodos em malha fechada poderão produzir controladores com um desempenho melhor que o obtido com o algoritmo de aproximação logarítmica. Isso é de esperar, quando se utilizam métodos em malha fechada, contra métodos em malha aberta.

Quanto à comparação dos métodos em malha aberta entre si, o método de Tustin é obviamente aquele que produz melhores resultados. De salientar a não obtenção de resultados estáveis em qualquer das plantas com os métodos de Boxer Thaler e Madwed Truxal. Também o método da resposta invariante ao degrau, não produziu resultados aceitáveis. O método de mapeamento de pólos e zeros, produziu resultados bastante aceitáveis, ainda que não melhores que o método de Tustin.

Verifica-se claramente, que os métodos mais simples não conseguem produzir resultados válidos, quando o controlador se torna mais complicado. O método de Tustin, mesmo no sistema de Grenoble, tem um desempenho bastante satisfatório.

Se se pretender uma comparação complexidade/desempenho, pensamos que o método de Tustin é realmente aquele que se impõe, apesar de globalmente, e como já dissemos, o algoritmo de aproximação logarítmica, mostrar, no sistema de Grenoble, um desempenho excelente.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

7 - Conclusões

A investigação levada a cabo ao longo deste trabalho, nomeadamente na busca de apresentações, sobre a discretização de funções de transferência contínuas, mostra que esse assunto é ainda alvo estudo. Relativamente ao referido no capítulo 2.4, vemos assim que se investe ainda tempo na obtenção de representações discretas a partir de representações contínuas.

Cabe aqui, referir um dado que a nosso ver pode ser indicador do “status quo” nesta área. Ao desafio do centro de investigação de Grenoble, referido no capítulo 6.1, responderam 8 autores, usando diferentes metodologias no desenvolvimento dos controladores que apresentam. Só dois desses autores utilizaram técnicas de desenvolvimento no domínio contínuo, efectuando posteriormente a discretização dos controladores obtidos, com vista à sua implementação prática. Todos os outros métodos partiram de técnicas de desenvolvimento no domínio discreto. Acontece que, foi precisamente um desses dois autores [29] que obteve o melhor resultado, no conjunto das 8 propostas apresentadas. Este resultado, a nosso ver, confirma a ideia, apresentada no já referido capítulo 2.4, que refere que, existe uma maior compreensão de um sistema físico através da sua representação contínua, do que através da sua representação discreta. Este factor, permite o desenvolvimento de controladores com bastante qualidade. Por tudo isto, são e serão sempre muito importantes, na nossa opinião, os processos de discretização. Esta é uma das conclusões que podemos tirar no final deste trabalho.

Relativamente ao estudo dos diferentes métodos estudados três pontos principais, podem resumir as conclusões do trabalho.

1. Nos métodos de malha aberta, o de Tustin distingue-se dos restantes, pelos desempenhos que consegue obter, sendo apesar de tudo, um método bastante simples. É este, claramente, o melhor dos métodos em malha aberta, deixando de fora para já o da Aproximação Logarítmica, analisado mais à frente.
2. Os métodos em malha fechada, devido à complexidade que envolvem, tem uma utilização bastante difícil. É no entanto claro, o melhor desempenho que obtêm, face aos métodos em malha aberta. Um dos factores a favor deste métodos, que pode ter bastante peso, na utilização que se faça, ou não deles, é a redução da frequência de

amostragem que conseguem, sem que o desempenho se ressinta desse facto. Conforme referem os autores, em muitos casos, é possível a redução da frequência de amostragem por um factor de 10. Quando for necessário reduzir a frequência de amostragem, ou o se o sistema a discretizar for complexo, pode valer a pena utilizar um método em malha fechada, em vez de um método em malha aberta.

3. O terceiro ponto tem a ver com o método de aproximação logarítmica, apresentado neste trabalho. Tem um desempenho equivalente ao de Tustin e é surpreendente a redução da ordem modelo efectuada na discretização do sistema de Grenoble. Conseguiu reduzir a ordem do modelo de 9 para 3. Um facto muito significativo, se pensarmos numa implementação prática do controlador.

Globalmente, convém referir mais alguns aspectos.

A não implementação dos métodos em malha fechada, impediu a aplicação desses métodos no sistema de Grenoble. Como foi no entanto referido no trabalho, pensamos que, devido às técnicas utilizadas, esses métodos dificilmente conseguirão uma redução da ordem do modelo, como a obtida pelo método de aproximação logarítmica. Será no entanto um trabalho futuro a realizar, no sentido de confirmar as qualidades deste método.

Existem ainda outros aspectos, não abordados neste trabalho, que podem trazer novos resultados. Um estudo que pode ser realizado, é verificar até que ponto se pode diminuir o período de amostragem, sem perder a qualidade do desempenho. Apesar de ser um estudo simples de levar a cabo, não foi possível realizá-lo neste trabalho. A aproximação da resposta em frequência em malha aberta usando algoritmos de identificação diferentes do utilizado no método de Aproximação Logarítmica, é outro dos estudos que pode ser levado a cabo.

Pensamos ter realizado um trabalho que permitiu tirar conclusões interessantes, abrindo campo à continuação do estudo nesta área. Talvez mais importante do que a comparação dos diversos métodos entre si, a conclusão de que vale ainda a pena investir nesta área, numa altura em que, os processos de desenvolvimento de controladores directamente no domínio discreto evoluem cada vez mais, é um dos pontos chave deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

Bibliografia

Livros:

- [1] K. J. Åström, B. Wittenmark "COMPUTER CONTROLLED SYSTEMS Theory and Design", Prentice-Hall.
- [2] C. Houpis, G. B. Lamont "DIGITAL CONTROL SYSTEMS Theory, Hardware, Software", McGraw-Hill.
- [3] K. Ogata "Modern Control Engineering", Prentice-Hall.
- [4] J. D'azzo, C. Houpis "Linear Control Systems and Design - Conventional and Modern", McGraw - Hill.
- [5] Benjamin C. Kuo "Automatic Control Systems", Prentice-Hall.
- [6] G. F. Franklin, J. D. Powell, E. N. Abbas, "Feedback Control of Dynamic Systems", Addison-Wesley.
- [7] J. L. Martins de Crvalho, "Dynamical Systems and Automatic Control", Prentice-Hall
- [8] C. R. Wylie, L. C. Barrett "Advanced Engineering Mathematics", McGraw-Hill
- [9] Paul Katz, "Digital Control Using Microprocessors", Prentice-Hall

Artigos:

- [10] B. C. Kuo, D. W. Peterson "Optimal Discretization of Continuous-Data Control System", Automatica, Vol. 9, pp 125-129, 1973.
- [11] C. P. Neuman, C. S. Baradello "Digital Transfer Functions for Microcomputer Control", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-9, n° 12, Dezembro de 1979
- [12] P. J. Lawrence, Rogers "Sequential Transfer Function Synthesis from Measured Frequency Response Data", Proc. IEE, Vol 126, 1, pp 104-106, 1979.
- [13] J. F. Hauer "Power System Identification by Fitting Models to Measured Frequency Response", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. Pas-101, n° 4 Abril de 1982.
- [14] Kuldip S. Rattan, "Digitalization of Existing Continuous Control Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC 29, n° 3 Março de 1984.
- [15] P. L. Santos, J. M. Carvalho "A Robust Computer Algorithm for Determining the Transfer Function of an Industrial System from its Frequency Response", Anais do 7º Congresso Brasileiro de Automatica (IFAC), S. P. Brasil, Vol 1, pp 124-129, 1988.
- [16] P. L. Santos, J. M. Carvalho "Continuous-time System Identification from Bode Plots", Relatório Interno - INESC-N, Largo de Monpilher, 22, Porto, 1989.
- [17] P.L. Santos, J. M. Carvalho "A Robust Algorithm for Identifying Transfer Function Poles from a Frequency Response", Anal. Model Simulation, 7, Akademie-Verlag Berlin, 1990.
- [18] P. L. Santos, J. M. Carvalho "Automatic Transfer Function Synthesis from a Bode Plot", Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu, Hawaii, 1990.
- [19] R. A. Kennedy and R. J. Evans, "Digital Redesign of a Continuous Time Controller Based On a

Closed Loop Performance”, Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu, Hawaii, 1990.

[20] Zdislaw Kowalkzuc “On Discretization of Continuous-Time State-Space Models: A Stable-Normal Approach”, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 37, n° 2, Fevereiro de 1991.

[21] Jürg P. Keller, Brian D. O. Anderson “A New Approach to the Discretization of Continuous-Time Controllers”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, n°2 Fevereiro de 1992.

[22] Zdislaw Kowalkzuc “Discret Approximation of Continuous-Time Systems: A Survey”, IEEE Proceedings-G, Vol. 140, n° 4 Agosto de 1993.

[23] Zdislaw Kowalkzuc “Closed form Discret-Time Modeling of Continuous Systems”, Proceedings of the 2nd European Control Conference, ECC 93, Junho/Julho 1993.

[24] Perry Blackmore, Darrell Willianson, Iven Mareels, “Signal Invariant Transformation Technics for the Discretization of Analog Controllers”, Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Dezembro de 1994.

[25] Graham C. Goodwin, Mario Salgado, “Frequency Domain Sensitivity Function for Continuous-Time Systems Under Sampled Data Control”, Automatica, Vol. 30, n° 8, pp 1263-1270, 1994.

[26] Haig Utidjian, Jan Maciekowsky, Sanjay Lall “Optimal Discretization of Continuous-Time Controllers”, Proceedings of the 3rd European Control Conference ECC 95, Setembro de 1995.

[27] European Journal of Control, Volume 1 número 2, 1995.

[28] I. D. Landau, D. Rey, A. Karimi, A. Voda, A Franco “A Flexible Transmission System as a Benchmark for Robust Digital Control”, European Journal of Control, Vol 1, n° 2, pp 77-96, 1995.

[29] Matias Nordin, Per-Olof Gutman “Digital QFT Design for the Benchmark Problem”, European Journal of Control, Vol. 1, n° 2, pp 97-103, 1995.

[30] Lopes dos Santos, J. L. Martins de Crvalho, “Transfer Function Parameter Estimation from Bode Plots”, Proceedings of the 3rd European Control Conference, Roma, Setembro de 1995.

[31] Paulo Lopes dos Santos, “Identificação de Sistemas Através de Diagramas de Bode”, Tese de Doutoramento, F.E.U.P. Porto, 1994

[32] Richard H. Middleton, Graham C. Goodwin, “Digital Control and Estimation, a Unified Approach”, Prentice-Hall



FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

BIBLIOTECA



000007799

