

CARACTERÍSTICAS DE INSTRUMENTOS – DESEMPENHO GENERALIZADO

CONJUNTO DE TRANSPARÊNCIAS PREPARADO COM BASE NO CAPÍTULO 3 DE:

DOEBELIN, E. O. *MEASUREMENT SYSTEMS – APPLICATION AND DESIGN*. MCGRAW-HILL, 4TH EDITION, 1990. PAGES 94-118.

VERSÃO 1.1 (ÚLTIMA REVISÃO EM 01.10.2012)

CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DE INSTRUMENTOS

“...TO STUDY IN CONSIDERABLE DETAIL THE PERFORMANCE OF MEASURING INSTRUMENTS AND SYSTEMS WITH REGARD TO HOW WELL THEY MEASURE THE DESIRED INPUTS AND HOW THEY REJECT THE SPURIOUS INPUTS.”

TIPOS DE CARACTERÍSTICAS:

CARACTERÍSTICA ESTÁTICA – É INDICADA PARA A MEDIÇÃO DE GRANDEZAS QUE SÃO CONSTANTES OU QUE VARIAM LENTAMENTE COM O TEMPO;

CARACTERÍSTICA DINÂMICA – É INDICADA PARA A MEDIÇÃO DE GRANDEZAS QUE VARIAM RAPIDAMENTE COM O TEMPO. EMPREGAM-SE AS E.D.O.

OBS.: MÉTODOS COMPLEMENTARES.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA CALIBRAÇÃO:

- ESCOLHA DE UM INSTRUMENTO COMERCIAL MAIS ADEQUADO PARA UMA DADA MEDIÇÃO;
- PROJETO DE INSTRUMENTOS PARA ALGUMA DADA TAREFA DE MEDIÇÃO.

CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS (ITEM 3.3, PÁG. 94)

- SISTEMAS DINÂMICOS E MODELO MATEMÁTICO GENERALIZADO DOS SISTEMAS DE MEDIÇÃO

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i$$

EM QUE: q_o = GRANDEZA DE SAÍDA; q_i = GRANDEZA DE ENTRADA; t = TEMPO; a 's, b 's = COMBINAÇÕES DE PARÂMETROS FÍSICOS DO SISTEMA, CONSIDERADOS CONSTANTES.

- OPERADOR DIFERENCIAL D
- PARTE DA SOLUÇÃO FUNÇÃO-COMPLEMENTAR
- PARTE DA SOLUÇÃO INTEGRAL-PARTICULAR
- EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

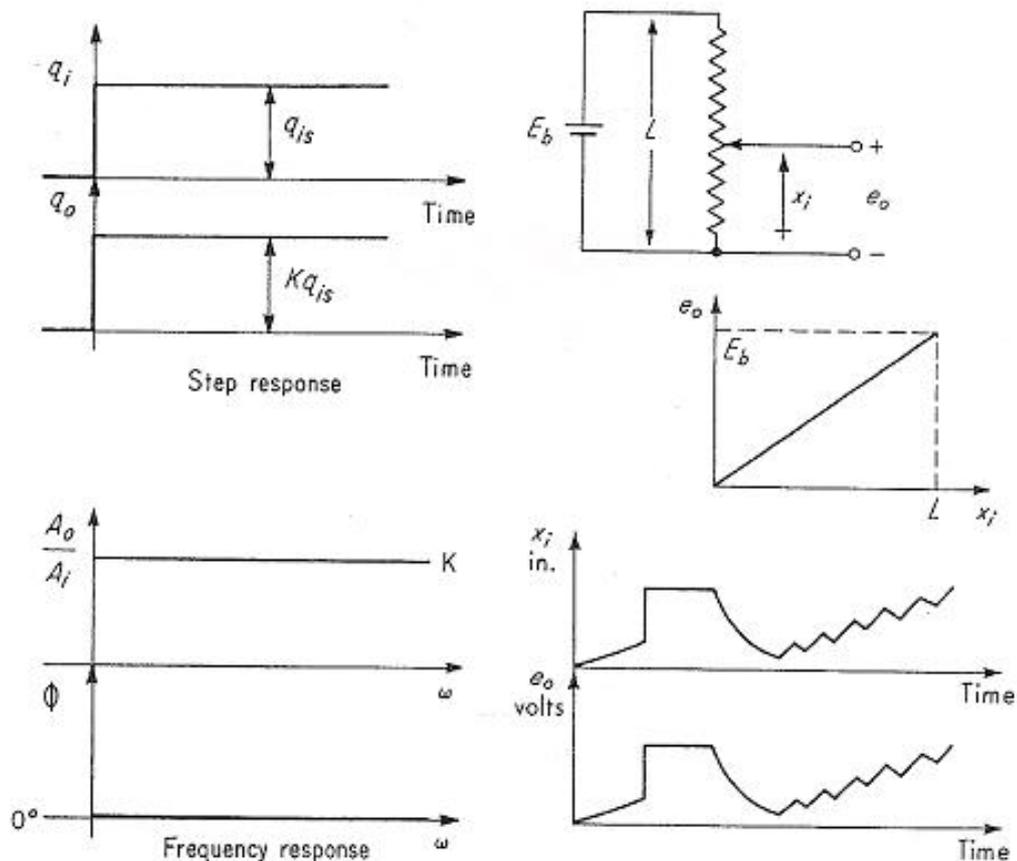
RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

1. *RAÍZES REAIS E DISTINTAS.* PARA CADA RAIZ s DISTINTA, ESCREVE-SE UM TERMO DA SOLUÇÃO COMO Ce^{st} EM QUE C É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA.
2. *RAÍZES REAIS, REPETIDAS.* PARA CADA RAIZ s QUE APARECE p VEZES, A SOLUÇÃO É ESCRITA COMO $(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_{p-1} t^{p-1})e^{st}$.
3. *RAÍZES COMPLEXAS E DISTINTAS.* PARA CADA PAR DE RAÍZES, A SOLUÇÃO CORRESPONDENTE É: $Ce^{at} \cdot \text{sen}(bt + \phi)$, EM QUE C e ϕ SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

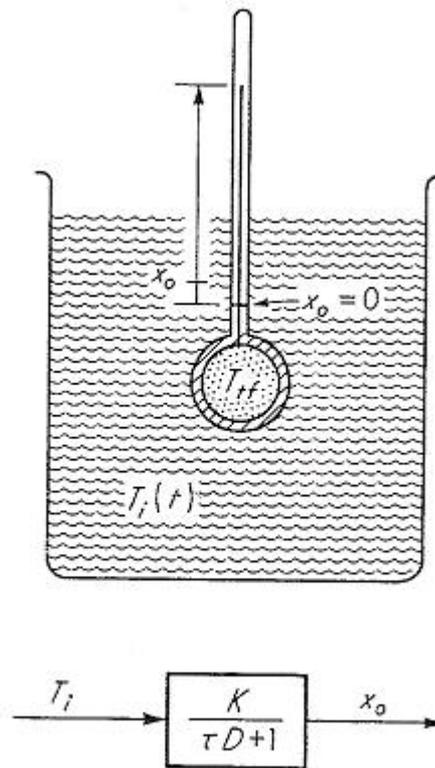
4. RAÍZES COMPLEXAS E REPETIDAS. PARA CADA PAR DE RAÍZES QUE APARECE p VEZES, A SOLUÇÃO CORRESPONDENTE É: $C_0 e^{at} \cdot \text{sen}(bt + \phi_0) + \dots + C_{p-1} t^{p-1} e^{at} \cdot \text{sen}(bt + \phi_{p-1})$.

- MÉTODOS DE SIMULAÇÃO DIGITAL PARA ANÁLISE DE RESPOSTA DINÂMICA
- FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA OPERACIONAL
- FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA SENOIDAL
- INSTRUMENTO DE ORDEM ZERO (FIG.3.33)

SENSIBILIDADE ESTÁTICA (K) (OU “GANHO” DE REGIME PERMANENTE)



- **INSTRUMENTO DE PRIMEIRA ORDEM**



INSTRUMENTO: TERMÔMETRO DE VIDRO (FIG.3.34)

ENTRADA: TEMPERATURA $T_i(t)$ DO FLUIDO NAS PROXIMIDADES DO BULBO DO TERMÔMETRO.

SAÍDA: DESLOCAMENTO x_0 DO FLUIDO DO TERMÔMETRO NO TUBO CAPILAR.

CONSIDERAÇÕES: A TEMPERATURA $T_i(t)$ É UNIFORME POR TODO O FLUIDO EM QUALQUER INSTANTE DE TEMPO E A INÉRCIA MECÂNICA DO FLUIDO É DESPREZÍVEL SE COMPARADA À INÉRCIA TÉRMICA DE TRANSFÊNCIA DO CALOR DA REGIÃO DE INTERESSE PARA O FLUIDO DE ENCHIMENTO.

MODELO:

$$x_0 = \frac{K_{ex} V_b}{A_c} T_{ff}$$

EM QUE:

x_0 = DESLOCAMENTO A PARTIR DA MARCA DE REFERÊNCIA

T_{tf} = TEMPERATURA DO FLUIDO NO BULBO

K_{ex} = COEF. DE EXPANSÃO DIFERENCIAL DO FLUIDO DO TERMÔMETRO E DO BULBO DE VIDRO

V_b = VOLUME DO BULBO

A_c = ÁREA DE SEÇÃO RETA DO TUBO CAPILAR

CALOR DE ENTRADA – CALOR DE SAÍDA = ENERGIA ARMAZENADA

$$UA_b(T_i - T_{tf})dt - 0 = V_b\rho CdT_{tf}$$

EM QUE: U=COEF. DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR GERAL NA PAREDE DO BULBO DE VIDRO; A_b =ÁREA EFETIVA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR; ρ =DENSIDADE MÁSSICA DO FLUIDO; C=CALOR ESPECÍFICO DO FLUIDO.

OUTRAS CONSIDERAÇÕES:

- 1) A ÁREA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR A_b É CONSTANTE. NA VERDADE, EXPANSÃO E CONTRAÇÃO ALTERARIAM A_b . PORÉM, TAL EFEITO DEVE SER BEM PEQUENO.
- 2) A MASSA DO FLUIDO NO BULBO É CONSTANTE.
- 3) O CALOR ESPECÍFICO C É CONSTANTE.

OBS.: A ESCOLHA DAS CONSIDERAÇÕES QUE SÃO *SUFICIENTEMENTE ADEQUADAS* PARA AS NECESSIDADES DA ANÁLISE EM MÃOS É UMA DAS MAIS DIFÍCEIS E IMPORTANTES TAREFAS DO ENGENHEIRO.

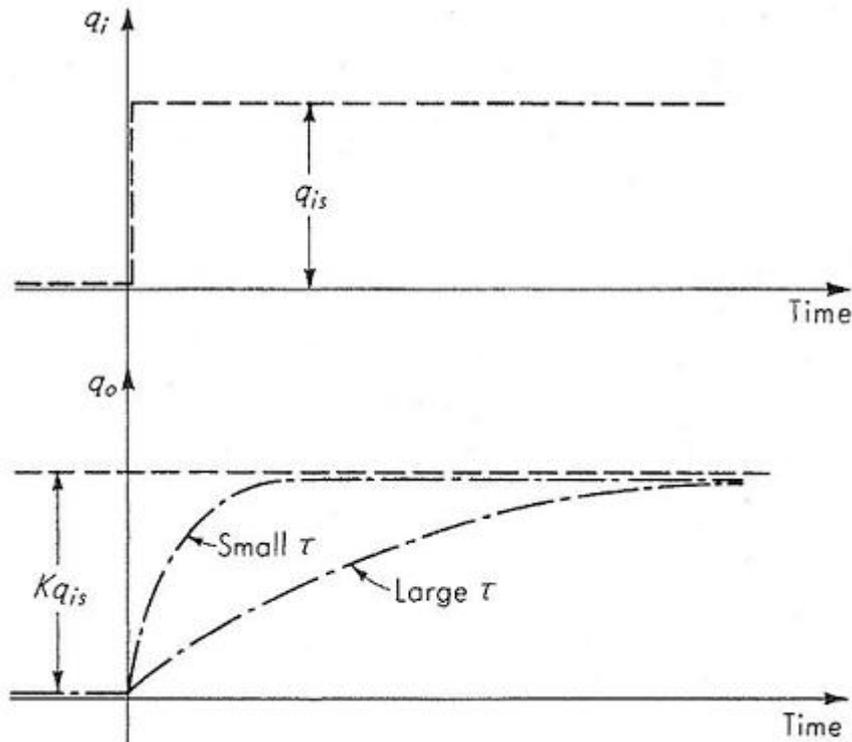
E COMO OBTER A RESPOSTA DINÂMICA?

UTILIZANDO-SE UM CONJUNTO DE ENTRADAS PADRÃO QUE SÃO UMA APROXIMAÇÃO DAS ENTRADAS REAIS E QUE SERVEM PARA:

- A) SE ESTUDAR OS EFEITOS DA MUDANÇA DE PARÂMETROS EM UM DADO INSTRUMENTO;
- B) COMPARAR O DESEMPENHO RELATIVO DE DOIS SISTEMAS DE MEDIÇÃO CONCORRENTES.

RESPOSTA AO DEGRAU DE INSTRUMENTOS DE 1ª ORDEM

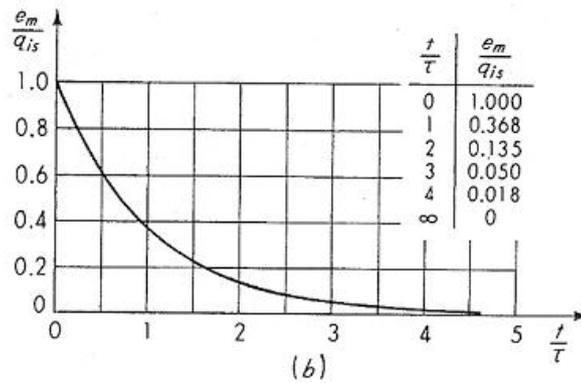
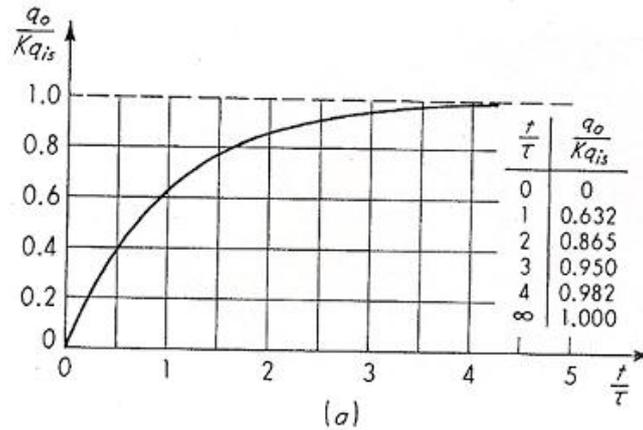
PARA SE APLICAR UMA ENTRADA DEGRAU AO SISTEMA, CONSIDERA-SE QUE ELE ESTEJA INICIALMENTE EM EQUILÍBRIO, I.E., COM $q_i = q_o = 0$, QUANDO NO TEMPO $t = 0$ A ENTRADA CRESCE INSTANTANEAMENTE POR UMA QUANTIDADE q_{is} (FIG.3.35).



$$q_o = Kq_{is}(1 - e^{-t/\tau})$$

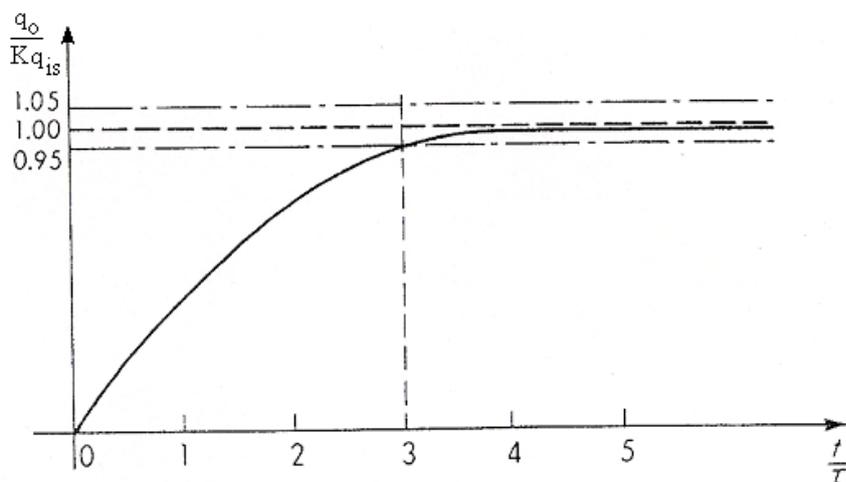
CONCLUSÃO: A VELOCIDADE DE RESPOSTA DEPENDE APENAS DO VALOR DE τ E É MAIS RÁPIDA SE τ FOR PEQUENO. PORTANTO, ESSE PARÂMETRO DEVE SER MINIMIZADO PARA QUE SE OBTENHAM MEDIÇÕES DINÂMICAS REPRESENTATIVAS.

RESPOSTAS ADIMENSIONAIS (FIG. 3.36)



TEMPO DE ACOMODAÇÃO (TA)

É O TEMPO – APÓS A APLICAÇÃO DE UM DEGRAU – PARA O INSTRUMENTO ALCANÇAR E FICAR DENTRO DE UMA FAIXA DE TOLERÂNCIA (EM %) AO REDOR DE SEU VALOR FINAL (FIG.3.37).



NOTAS: A) SE TA É PEQUENO, A RESPOSTA É RÁPIDA.

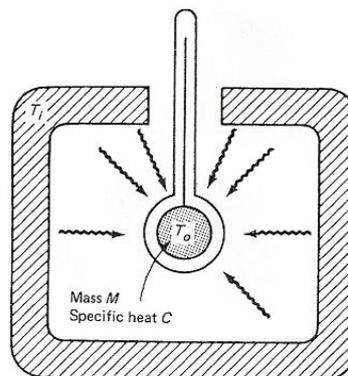
B) PARA UM INSTRUMENTO DE 1ª ORDEM, UM TA DE 5% É IGUAL A TRÊS CONSTANTES DE TEMPO.

C) NO EXEMPLO DO TERMÔMETRO DE VIDRO, τ PODE SER REDUZIDO ATRAVÉS DE UMA REDUÇÃO DE ρ , C E V_b OU ATRAVÉS DE UM AUMENTO DE U E A_b . PORÉM, UMA REDUÇÃO DE τ IMPLICA EM UMA REDUÇÃO DE K .

D) UM TERMÔMETRO COLOCADO EM ÓLEO AGITADO PODE TER UM τ DE 5s ENQUANTO QUE O MESMO TERMÔMETRO PODE APRESENTAR UM τ DE 100s SE ELE ESTIVER NO AR.

EXEMPLO DE RESPOSTA DE INSTRUM. NÃO LINEARES

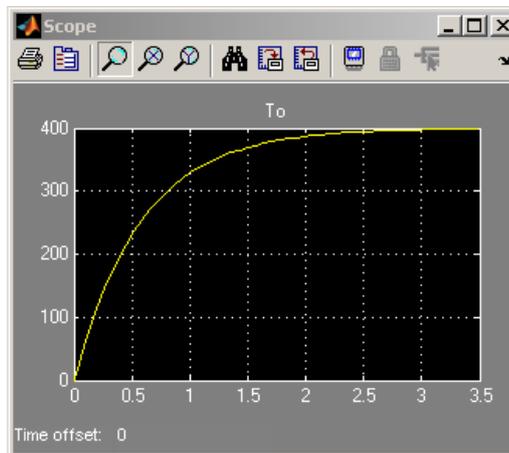
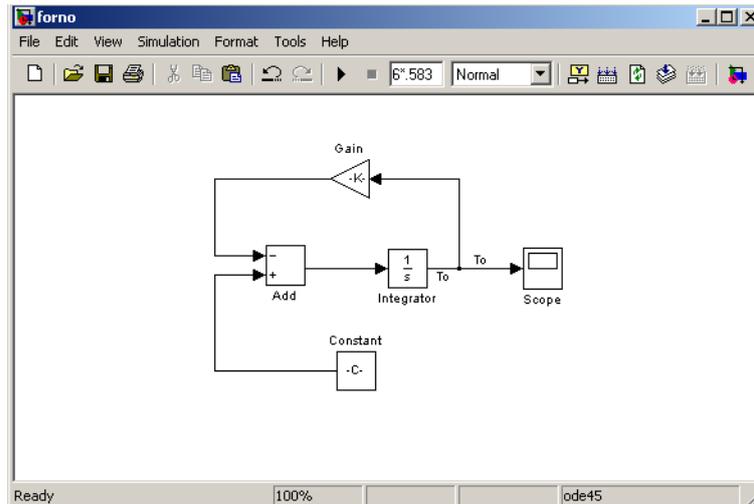
“CONSIDERE O FORNO À VÁCUO DA FIG.3.38a. A TEMPERATURA DE SUA PAREDE T_i ESTÁ A 400 K QUANDO UM TERMÔMETRO A 300 K É REPENTINAMENTE INSERIDO NO SEU INTERIOR, FICANDO SUJEITO A UM DEGRAU DE 100 K.”



MODELO LINEARIZADO DO SISTEMA

$$0.583 \frac{dT_0}{dt} + T_0 = T_i = 400$$

SIMULAÇÃO DIGITAL VIA SIMULINK E RESULTADO OBTIDO



RESPOSTA À RAMPA DE INSTRUMENTOS DE 1ª ORDEM

PARA SE APLICAR UMA ENTRADA EM RAMPA AO SISTEMA, CONSIDERA-SE QUE ELE ESTEJA INICIALMENTE EM EQUILÍBRIO, I.E., COM $q_i = q_o = 0$, QUANDO NO TEMPO $t = 0$ A ENTRADA q_i REPENTINAMENTE COMEÇA A MUDAR À TAXA CONSTANTE \dot{q}_{is} (FIG. 3.39).

Ramp Response of First-Order Instruments

To apply a ramp input to a system, we assume that initially the system is in equilibrium, with $q_i = q_o = 0$, when at $t = 0$ the input q_i suddenly starts to change at a constant rate \dot{q}_{is} . We thus have

$$q_i = \begin{cases} q_0 = 0 & t \leq 0 \\ \dot{q}_{is}t & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.124)$$

and therefore $(\tau D + 1)q_o = K\dot{q}_{is}t$

The necessary initial condition again can be shown to be $q_o = 0$ for $t = 0^+$. Solution of Eq. (3.124) gives

$$\begin{aligned} q_{ocf} &= Ce^{-t/\tau} \\ q_{opi} &= K\dot{q}_{is}(t - \tau) \\ q_o &= Ce^{-t/\tau} + K\dot{q}_{is}(t - \tau) \end{aligned}$$

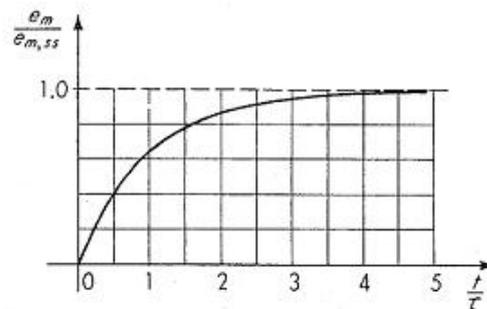
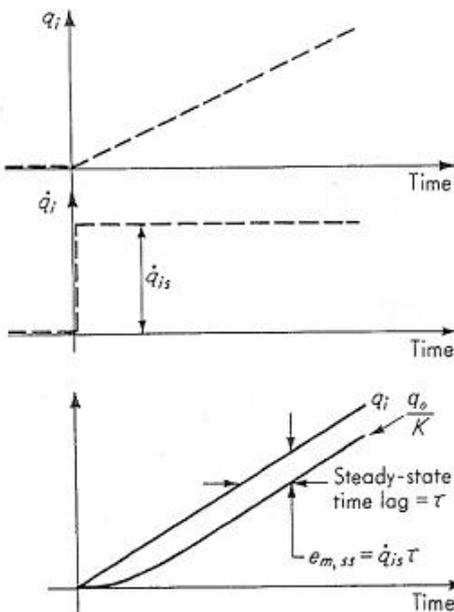
and applying the initial condition gives

$$q_o = K\dot{q}_{is}(\tau e^{-t/\tau} + t - \tau) \quad (3.125)$$

We again define measurement error e_m by

$$e_m \triangleq q_i - \frac{q_o}{K} = \dot{q}_{is}t - \dot{q}_{is}\tau e^{-t/\tau} - \dot{q}_{is}t + \dot{q}_{is}\tau \quad (3.126)$$

$$e_m = \underbrace{-\dot{q}_{is}\tau e^{-t/\tau}}_{\substack{\text{transient error} \\ e_{m,t}}} + \underbrace{\dot{q}_{is}\tau}_{\substack{\text{steady-state error} \\ e_{m,ss}}} \quad (3.127)$$



NOTAS: A) O ERRO TRANSITÓRIO DESAPARECE À MEDIDA QUE O TEMPO PASSA AO PASSO QUE O ERRO DE REGIME PERMANENTE PERSISTE.

B) O ERRO TRANSITÓRIO DESAPARECE MAIS RAPIDAMENTE SE τ É PEQUENO E O ERRO PERMANENTE É DIRETAMENTE PROPORCIONAL A τ .

C) EM REGIME PERMANENTE, O DESLOCAMENTO HORIZONTAL ENTRE AS CURVAS DE ENTRADA E SAÍDA É O PRÓPRIO τ . ISSO IMPLICA QUE O INSTRUMENTO ESTÁ LENDO O VALOR QUE A ENTRADA ASSUMIU τ SEGUNDOS ATRÁS.

EXERCÍCIO – BALÃO METEOROLÓGICO

Um balão carregando um termômetro com uma constante de tempo igual a 15s sobe através da atmosfera a 6m/s. Considere que a temperatura varie com a altitude na taxa de 0,15°C/30m. O balão envia as leituras de temperatura e altitude de volta a Terra. Daí, pede-se:

- Apresente as curvas: $q_i \times t$ e $\dot{q}_i \times t$.
- Determine o modelo matemático particular completo para este problema (i.e., $q_o = q_{ocf} + q_{opi}$).
- Calcule o erro de medição de regime permanente. Qual a influência do erro de medição transitório nesta análise?
- A 3000m o balão diz que a temperatura é 0°C. No entanto, qual a verdadeira altitude na qual essa temperatura ocorre?
- Qual a temperatura ambiente no local de lançamento do balão?
- Qual a interpretação física de τ ? (Dica: Esboce as curvas $q_i \times t$ e $q_o/K \times t$ num mesmo gráfico)



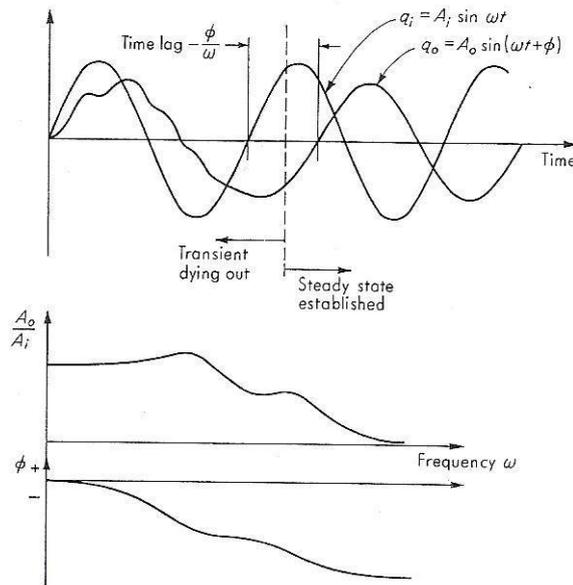
<http://www.geo.msu.edu/research/climate/metcrax.html>

Sinusoidal Transfer Function

Sinusoidal transfer function $\triangleq \frac{q_o}{q_i}(i\omega)$

$$\triangleq \frac{b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + b_1i\omega + b_0}{a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \dots + a_1i\omega + a_0} \quad \text{Eq. (3.108)}$$

where $i \triangleq \sqrt{-1}$ and $\omega \triangleq$ frequency in radians per unit time. For any given frequency ω , Eq. (3.108) shows that $(q_o/q_i)(i\omega)$ is a complex number, which can always be put in the polar form $M \angle \phi$. We prove that *the magnitude M of the complex number is the amplitude ratio A_o/A_i while the angle ϕ is the phase angle by which the output q_o leads the input q_i .* (If the output lags the input, ϕ is negative.)



Frequency-response terminology.

FREQUENCY RESPONSE OF FIRST-ORDER INSTRUMENTS

$$\frac{q_o}{q_i}(i\omega) = \frac{K}{i\omega\tau + 1} = \frac{K}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \angle [\tan^{-1}(-\omega\tau)]$$

Thus the amplitude ratio is $\frac{A_o}{A_i} = \left| \frac{q_o}{q_i}(i\omega) \right| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}$

and the phase angle is $\phi = \angle \frac{q_o}{q_i}(i\omega) = \tan^{-1}(-\omega\tau)$

The ideal frequency response would have $\frac{q_o}{q_i}(i\omega) = K \angle 0^\circ$

EXAMPLE ($\tau=0.2$ s)

$$q_i = 1 \sin 2t + 0.3 \sin 20t$$

$$\left. \frac{q_o}{q_i}(i\omega) \right|_{\omega=2} = \frac{K}{\sqrt{0.16 + 1}} \angle -21.8^\circ = 0.93K \angle -21.8^\circ$$

$$\left. \frac{q_o}{q_i}(i\omega) \right|_{\omega=20} = \frac{K}{\sqrt{16 + 1}} \angle -76^\circ = 0.24K \angle -76^\circ$$

We can then write q_o as

$$q_o = (1)(0.93K) \sin(2t - 21.8^\circ) + (0.3)(0.24K) \sin(20t - 76^\circ)$$

$$\frac{q_o}{K} = 0.93 \sin(2t - 21.8^\circ) + 0.072 \sin(20t - 76^\circ)$$

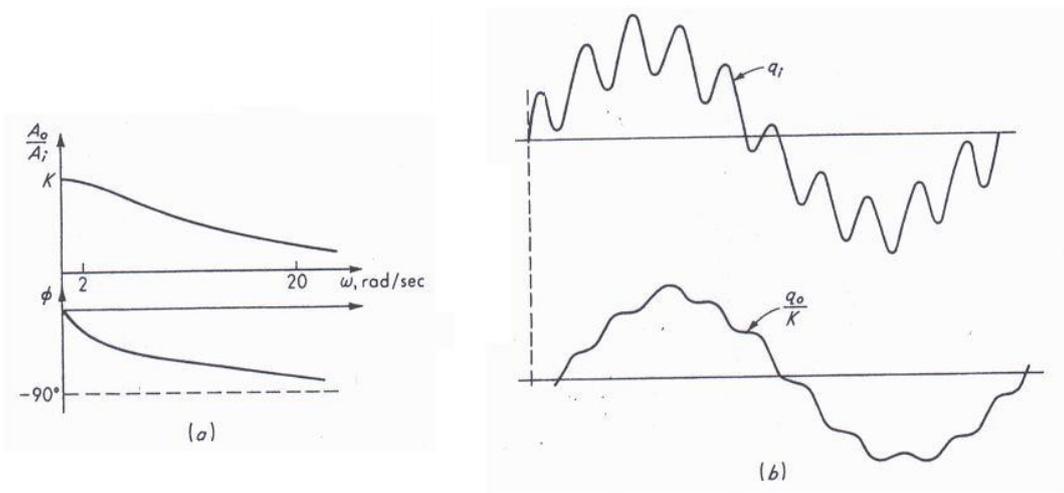
EXAMPLE ($\tau a = 0.002$ s)

$$\left. \frac{q_o}{q_i}(i\omega) \right|_{\omega=2} = \frac{K}{\sqrt{1.6 \times 10^{-5} + 1}} \angle -0.23^\circ = 1.00K \angle -0.23^\circ$$

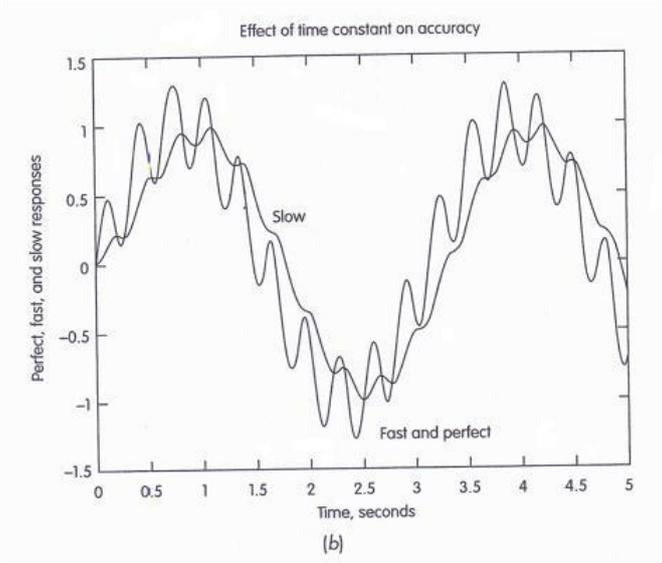
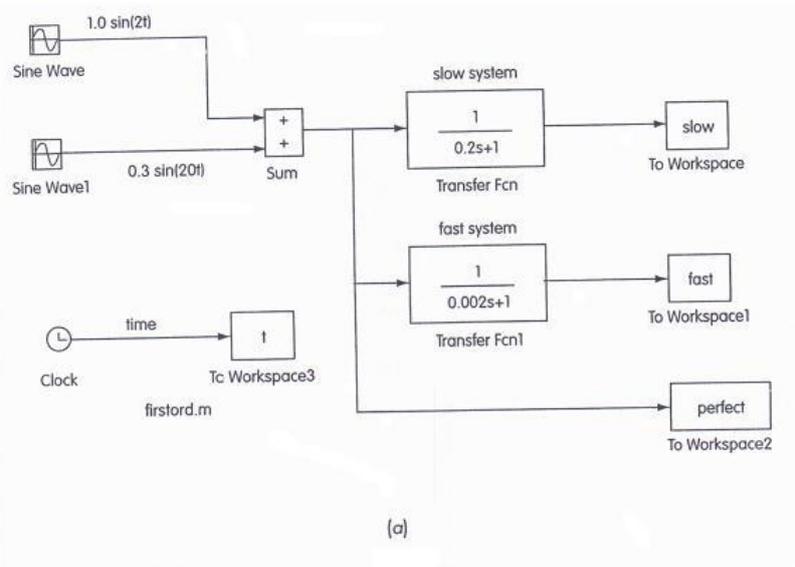
$$\left. \frac{q_o}{q_i}(i\omega) \right|_{\omega=20} = \frac{K}{\sqrt{1.6 \times 10^{-3} + 1}} \angle -2.3^\circ = 1.00K \angle -2.3^\circ$$

$$\frac{q_o}{K} = 1.00 \sin(2t - 0.23^\circ) + 0.3 \sin(20t - 2.3^\circ)$$

EXAMPLE OF INADEQUATE FREQUENCY RESPONSE



EFFECT OF FIRST-ORDER SYSTEM TIME CONSTANT ON MEASUREMENT ACCURACY



Second-Order Instrument

A *second-order instrument* is one that follows the equation

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

The essential parameters can be reduced to three:

$$K \triangleq \frac{b_0}{a_0} \triangleq \text{static sensitivity}$$

$$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \triangleq \text{undamped natural frequency, rad/time}$$

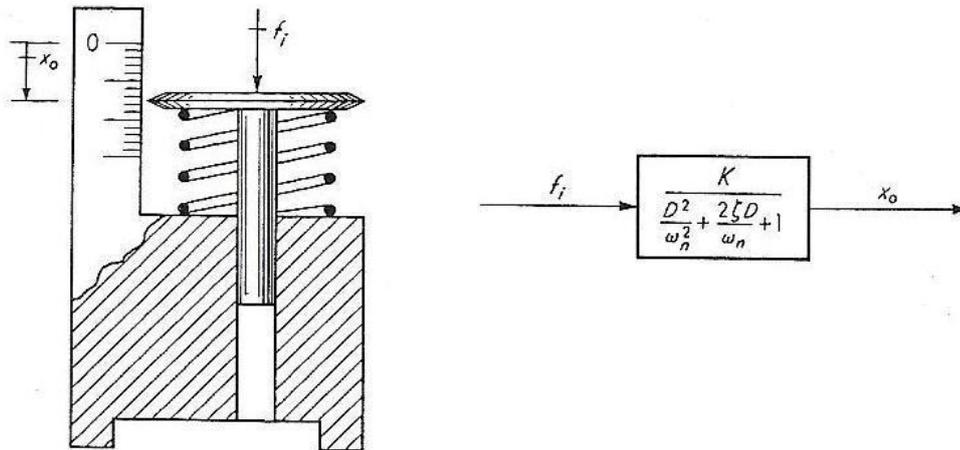
$$\zeta \triangleq \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \triangleq \text{damping ratio, dimensionless}$$

which gives

$$\left(\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta D}{\omega_n} + 1 \right) q_o = K q_i$$

The operational transfer function is thus $\frac{q_o}{q_i}(D) = \frac{K}{D^2/\omega_n^2 + 2\zeta D/\omega_n + 1}$

EXAMPLE OF A SECOND-ORDER INSTRUMENT: FORCE-MEASURING SPRING SCALE



The scale can be adjusted so that $x_o = 0$ when $f_i = 0$ (gravity force will then drop out of the equation), which yields

$$\Sigma \text{ forces} = (\text{mass})(\text{acceleration})$$

$$f_i - B \frac{dx_o}{dt} - K_s x_o = M \frac{d^2 x_o}{dt^2}$$

$$(MD^2 + BD + K_s)x_o = f_i$$

Noting this to fit the second-order model, we immediately define

$$K \triangleq \frac{1}{K_s} \quad \text{m/N}$$

$$\omega_n \triangleq \sqrt{\frac{K_s}{M}} \quad \text{rad/s}$$

$$\zeta \triangleq \frac{B}{2\sqrt{K_s M}}$$

Step Response of Second-Order Instruments

For a step input of size q_{is} we get

$$\left(\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta D}{\omega_n} + 1 \right) q_o = Kq_{is} \quad (3.200)$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} q_o &= 0 & \text{at } t = 0^+ \\ \frac{dq_o}{dt} &= 0 & \text{at } t = 0^+ \end{aligned} \quad (3.201)$$

The particular solution of Eq. (3.200) is clearly $q_{opi} = Kq_{is}$. The complementary-function solution takes on one of three possible forms, depending on whether the roots of the characteristic equation are real and unrepeated (overdamped case), real and repeated (critically damped case), or complex (underdamped case). The complete solutions of Eq. (3.200) with initial conditions (3.201) are, in nondimensional form,

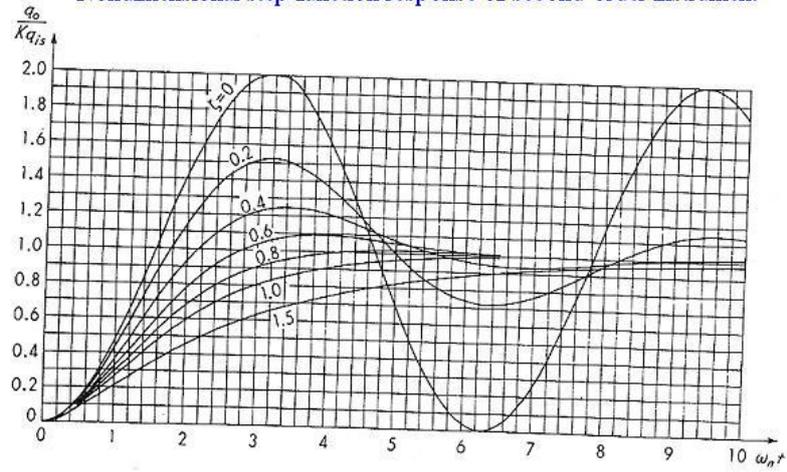
$$\begin{aligned} \frac{q_o}{Kq_{is}} &= -\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &+ \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + 1 \quad \text{overdamped} \end{aligned}$$

$$\frac{q_o}{Kq_{is}} = -(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t} + 1 \quad \text{critically damped}$$

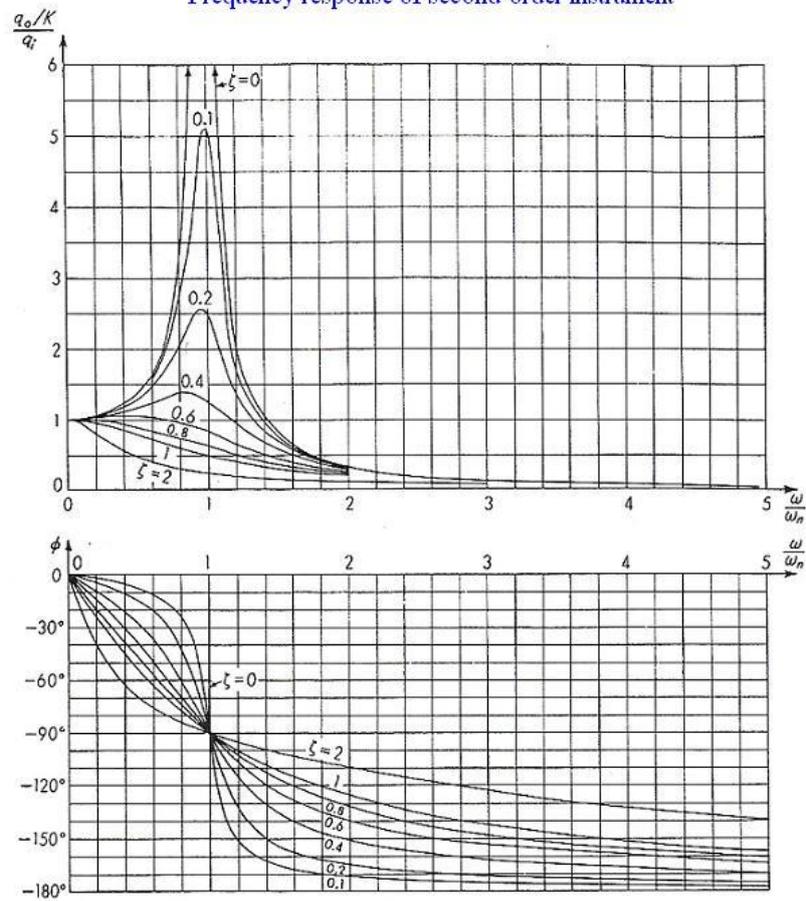
$$\frac{q_o}{Kq_{is}} = -\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \phi) + 1 \quad \text{underdamped}$$

$$\phi \triangleq \sin^{-1} \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Nondimensional step-function response of second-order instrument



Frequency response of second-order instrument



Obs.: Many commercial instruments use zeta = 0.6 to 0.7 because this range of zeta gives good frequency response over the widest frequency range.