Identificação de Sistemas de Tempo Discreto

Adrielle C. Santana

Introdução

A identificação de um sistema é o processo de construção de um modelo matemático desse sistema a partir do conhecimento das suas saídas dadas determinadas entradas.

Introdução

Exemplo: Determinar o ângulo de rotação de um braço robótico dado um determinado torque externo (distúrbio).

Saber responder a essa questão é importante para a construção do robô bem como o seu controle.

Solução possível: medir ângulos de rotação (y) para diferentes torques (u) e por meio de técnicas de identificação de sistemas derivar o modelo matemático do braço robótico que relaciona torque vs. rotação.

Introdução

- **Identificação Caixa-preta**

  Quando não se tem qualquer conhecimento sobre o sistema: como funciona, sua dinâmica ou a ordem do sistema.

- **Identificação Caixa-cinza**

  Quando existe algum conhecimento sobre o sistema: sabe-se sua ordem ou a estrutura geral do modelo faltando apenas identificar alguns parâmetros.

Introdução

Nesse curso serão abordados sistemas LTI e os modelos serão encontrados baseando-se em informações de entrada e saída do sistema.

A frequência de amostragem influencia na correta identificação da dinâmica de um sistema discreto. Caso ela seja muito baixa, pode não capturar variações rápidas de algumas ou todas as variáveis de estado.

Identificação de Sistemas Estáticos

- Sistemas sem memória: saída no tempo “t” depende de entrada no mesmo tempo “t”.
- MODELO

$$y(k)=\beta_o+\beta_1\varphi_1(u(k))+\beta_2\varphi_2(u(k))+\cdots+\beta_n\varphi_n(u(k))$$

β → Coeficientes a serem encontrados

$\varphi_i(u(k))$ → função real da entrada u(k)

n → grau da função $\varphi_i(u(k))$ → pode ser desconhecido ou não.

Identificação de Sistemas Estáticos

A solução anterior pode ser implementada, por exemplo, pelo método dos **Mínimos Quadrados.**

Seja o erro e(k) entre a saída real do sistema no instante k dada por y(k) e a saída estimada em função de uma ou mais entradas u(k).

$$e(k) = y(k) - \varphi^T(k)\beta$$

em que:

$$\varphi^T(k)\beta = [1\ \varphi_1(u(k))\ \varphi_2(u(k)) \ldots \varphi_n(u(k))]\beta$$

Identificação de Sistemas Estáticos

Cada medida y(k) é representada por uma equação que é função de $\varphi(k)$.

Os parâmetros β são estimados como solução do problema de otimização dado por:

$$\hat{\beta}=min\left(\sqrt{\Sigma_{k=0}^{N}\mathrm{e}^{2}(k)}\right)$$

N → número de observações / medições

RSS → root sum squares

Identificação de Sistemas Estáticos

E como definir a função $\varphi(k)$?

Caso essa informação não seja definida, uma opção comum é considerar $\varphi(k)$ como uma função polinomial da entrada u(k) do tipo:

$$y(k)=\beta_0+\beta_1 u(k)+\beta_2 u^2(k)+\ldots+\beta_n u^n(k)$$

Não confundir "n" que é a ordem do polinômio com "N" que é a quantidade de observações.

Identificação de Sistemas Estáticos

Exemplo:

Dadas as observações abaixo com valores de entrada e saída para um dado sistema, determine um modelo matemático que o descreva.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(k)$	0	100	800	4200	15800	46900	108000	262600	532000	1000700

```
n=3;

p=polyfit(u,y,n);

f=polyval(p,u);

plot(u,y,'ro',u,f,'blue*')
```

$$y(k)=4240\,u^3(k) - 46410\,u^2(k) + 150770\,u(k) - 127940$$

Identificação de Sistemas Estáticos

Caso se tenha um sistema caixa-cinza e falta apenas determinar os parâmetros do modelo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \varphi_1(u(0)) & \varphi_2(u(0)) & \cdots & \varphi_n(u(0)) \\ 1 & \varphi_1(u(1)) & \varphi_2(u(1)) & \cdots & \varphi_n(u(1)) \\ 1 & \varphi_1(u(2)) & \varphi_2(u(2)) & \cdots & \varphi_n(u(2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_1(u(N)) & \varphi_2(u(N)) & \cdots & \varphi_n(u(N)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\hat{\beta} = (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T y$$

Identificação de Sistemas Estáticos

Exemplo: Sejam as medidas abaixo feitas para o sistema cuja equação é conhecida. Determine o parâmetro β

k	x	y
0	0	0.01
1	1	1.01
2	2	3.98

$$y=\beta x^2$$

Observe que o termo β_0 (primeira coluna da matriz Φ) não existe na equação. Montando a estrutura então fica:

$$\begin{bmatrix} 0.01 \\ 1.01 \\ 3.98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \beta$$

Identificação de Sistemas Estáticos

Resolvendo a equação para β:

```
y=[0.01; 1.01; 3.98];
f=[0;1;4];
B=inv(transp(f)*f)*transp(f)*y;
```

Substituindo o β encontrado na fórmula para conferir o y estimado:

```
yest=f*B
```

```
yest =

                 0
  0.99588235294117
6 3.98352941176470
6
```

Identificação de Sistemas Dinâmicos

Seja:

$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$

$y(k)=Cx(k)+Du(k)$

- As matrizes A, B, C e D são desconhecidas;
- As medidas y(k) e u(k) não são confiáveis;
- n é desconhecida.

Como estimar A, B, C , D e n?

Identificação de Sistemas Dinâmicos

Nas técnicas tratadas aqui, vamos considerar que as medidas dos sensores não são um problema.

1ª abordagem: Caixa-preta (black-box)

2ª abordagem: Caixa-cinza

Sistemas Dinâmicos – caixa-preta

- Considere que o sistema em espaço de estados a ser identificado é controlável e observável.
- Seja x(0)=0
- Seja um impulso unitário:

$$u(k)=\begin{cases}1, k=0\\ 0, k=1,2,\ldots, N\end{cases}$$

- Considera-se u(k) rica o suficiente para obter a resposta dinâmica do sistema.
- Não há relação entre as entradas futuras e os estados passados.
- Seja o sistema SISO. m=p=1 m→ nº entradas p→ nº saídas

Sistemas Dinâmicos – caixa-preta

Lembrando que a identificação de um espaço de estados não é única. Diferentes A, B, C e D representam um mesmo sistema.

Segue um passo-a-passo de como realizar a identificação de um sistema representado em espaço de de estados com as condições preestabelecidas.

Será utilizada a *Singular Value Decomposition (svd)* na solução.

Sistemas Dinâmicos – caixa-preta

- SVD

A svd é a fatoração de uma matriz resultando em 3 matrizes com características específicas:

$$M = U\Sigma V^*$$

* → matriz conjugada transposta

U= matriz unitária mxm   U*U=UU*=I

As colunas de U são os autovetores de MM*.

Σ= matriz quadrada diagonal mxn

As colunas de V são os autovetores de M*M.

V= matriz unitária nxn

Sistemas Dinâmicos – caixa-preta

- 1º – defina M e N de modo que $M+N-1 < p$
- 2º – defina a matriz H1 – matriz de Hankel

$$H_1 = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(M-1) & y(M) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(M) & y(M+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N) & y(N+1) & \cdots & y(M+N-2) & y(M+N-1) \end{bmatrix}$$

- 3º – realizar a svd de H1. No MATLAB → [U,S,V]=svd(H1)

Sistemas Dinâmicos – caixa-preta

- 4º – Determine “n” (ordem do sistema) pelo número de itens na diagonal de S1 obtida de:

$$\begin{bmatrix} S1 & 0 \\ 0 & S2 \end{bmatrix}$$

- 5º – Determinar U1, V1 e S1 com “n” na forma:

$U1=(U(:,1:n))^T$ $V1=V(1:n,:)$ $S1 = S(1:n,1:n)$

Sistemas Dinâmicos – caixa-preta

- 6º – Definir a matriz de Hankel H2 na forma:

$$H_2 = \begin{bmatrix} y(2) & y(3) & \cdots & y(m) & y(m+1) \\ y(3) & y(4) & \cdots & y(m+1) & y(m+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N+1) & y(N+2) & \cdots & y(m+N-1) & y(m+N) \end{bmatrix}$$

- 7º – Definir as matrizes de observabilidade (O) e controlabilidade (L), obtidas por:

$$O = \left(S1^{\frac{1}{2}} U1\right)^T \qquad L = S1^{\frac{1}{2}} V1$$

Sistemas Dinâmicos – caixa-preta

- 8º – Encontrar a matriz A estimada: Â

$$\hat{A} = O^{-1} H_2 L^{-1}$$

obs.: No MATLAB caso a matriz não seja quadrada, realizar a inversa usando a função “pinv”.

- 9º – Encontrar as estimativas das matrizes B e C: $\hat{B}\, e\, \hat{C}$

$\hat{B} \rightarrow$ primeira coluna de L

$\hat{C} \rightarrow$ primeira linha de O

Sistemas Dinâmicos – caixa-preta

Obs.: Na definição da frequência de amostragem, escolha uma que tenha de 20 a 40 vezes a largura de banda do seu sistema em malha fechada (se ADC permitir também).

Assim garante-se o mínimo para detectar bem a dinâmica do sistema.

Sistemas Dinâmicos – caixa-preta

Exemplo:

Seja T=0.01s e u(k) um impulso unitário. Encontre as estimativas de A, B, C e n para as leituras em 8 instantes de tempo fornecidas abaixo:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
y(k)	0.996	-0.298	-0.0148	0.0338	-0.0081	-0.0011	0.0011	-0.0002