



# Identificação pelos mínimos quadrados

Adrielle C. Santana

# Identificação pelos mínimos quadrados

Como é uma identificação caixa-cinza, consideraremos que se conhece a quantidade de polos e zeros do sistema. A função de transferência terá a forma:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_{n-1}z + b_n}{z^n - a_1z^{n-1} - \dots - a_{n-1}z - a_n}$$

que resulta na equação de diferenças:

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_ny(k-n) \\ + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + \dots + b_nu(k-n)$$

# Identificação pelos mínimos quadrados

O sistema apresentado é conhecido como modelo média móvel autorregressivo (ARMA – *autorregressive moving-average*).

E o objetivo é encontrar o vetor dos coeficientes:

$$\Theta = (a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n)^T$$

por meio das medidas de  $u(k)$  e  $y(k)$ .

# Identificação pelos mínimos quadrados

Seja  $\mathbf{f}(k)$  o vetor definido pelas medidas  $u(k)$  e  $y(k)$  organizado da seguinte forma:

$$\mathbf{f}^T(k) = [y(k-1) \ y(k-2) \ \cdots \ y(k-n) \ u(k-1) \ \cdots \ u(k-n)]$$

O número de observações  $N$  deve ser tal que  $N \geq n$  e quanto mais melhor. Definem-se então as matrizes:

$$\mathbf{y}(N) = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(N) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T(n) \\ \mathbf{f}^T(n+1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}^T(N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}(N) = \begin{bmatrix} e(n) \\ e(n+1) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}$$

O número total de observações será  $(N+1)$ .

# Identificação pelos mínimos quadrados

Finalmente, os coeficientes podem ser encontrados fazendo-se:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS} = [\mathbf{F}^T(N)\mathbf{F}(N)]^{-1}\mathbf{F}^T(N)\mathbf{y}(N)$$

# Identificação pelos mínimos quadrados

Para controlar o erro de estimação que pode ser grande principalmente se houver **overfitting**, uma matriz de pesos pode ser utilizada.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{WLS} = [\mathbf{F}^T(N)\mathbf{W}(N)\mathbf{F}(N)]^{-1}\mathbf{F}^T(N)\mathbf{W}(N)\mathbf{y}(N)$$

A escolha dessa matriz bem como os melhores coeficientes finais pode ser feita de forma iterativa por técnicas de validação cruzada (como o k-fold) via *software*.

# Identificação pelos mínimos quadrados

Exemplos...