Identificação de Sistemas de Tempo Discreto

Trata-se do processo de construir o modelo matemático de um sistema a partir do conhecimento das suas saídas e de algumas entradas (se existirem).

Exemplo:

- Ângulo que um braço robótico pode girar ao receber um torque externo (distúrbio).
- Trata-se de uma informação importante tanto para a construção do robô bem como para o projeto do seu controle.
- Solução: medir diversos ângulos de rotação (y) para diferentes torques aplicados (u) e com essa informação aplicar alguma técnica de identificação de sistemas para derivar o modelo matemático que relaciona torque vs. Ângulo.

Identificação Caixa-Preta: Utilizada quando não se sabe nada sobre o modelo do sistema que se deseja identificar. Não se sabe como ele funciona, qual sua dinâmica e nem mesmo a ordem do sistema.

Identificação Caixa-Cinza: Nesse caso tem-se algum conhecimento sobre o modelo do sistema. A estrutura geral do modelo é conhecida, mas os parâmetros do modelo não. Aqui deseja-se identificar esses parâmetros.

Nesse texto, abordaremos a identificação de sistemas LTI modelados utilizado informações de entrada e saída do sistema.

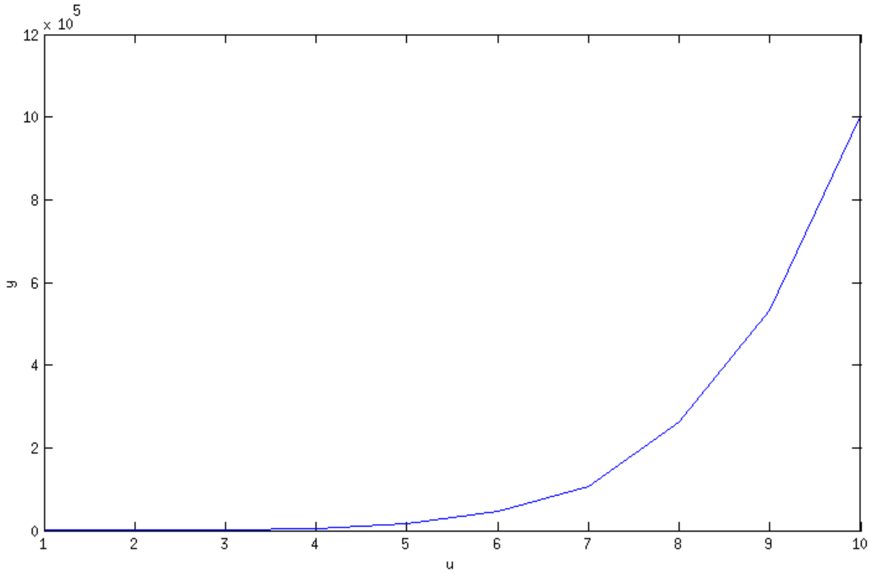
É importante observar que a frequência de amostragem deve ser bem determinada uma vez que a correta identificação da dinâmica de um sistema pode ser comprometida. Por exemplo, se a frequência de amostragem for muito baixa, ela pode não conseguir capturar rápidas respostas de algumas ou todas as variáveis de estado.

Identificação de Sistemas Estáticos

Tratam-se de sistemas sem memória, ou seja, sua saída em qualquer momento depende somente do valor da entrada nesse mesmo momento.

Problema: Dados os valores de entradas (u) e saídas (y) que definem a curva a seguir, encontre o modelo do sistema.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u(k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y(k)	0	100	800	4200	15800	46900	108000	262600	532000	1000700



Uma forma de modelar esse sistema é na forma:

$$y(k)=\beta_0+\beta_1\phi_1(u(k))+\beta_2\phi_2(u(k))+...+\beta_n\phi_n(u(k))$$

β → Coeficientes a serem encontrados. Números reais.
Φ_i (u(k)) → Função real da entrada u(k).
n → Grau da função Φ_i (u(k)) que pode ser desconhecido ou não.

Solução pelo Método dos Mínimos Quadrados

Seja,

$$e(k)=y(k)-\phi^T(k)\beta$$

$$\phi^T(k)\beta=[1\ \phi_1(u(k))\ \phi_2(u(k))\cdots\phi_n(u(k))]$$

Obs.: Cada y(k) medido é representado por uma equação.

Os parâmetros β (vetor) são estimados como solução do problema de otimização:

$$\hat{\beta}=min(\underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{N}e^2(k)}}_{RootSumSquared})$$

N → Número de observações / medições entrada-saída.

E como definir a função Φ_i ?

Caso essa informação do sistema não seja conhecida, uma opção usada é definir Φ_i como uma função polinomial da entrada u(k) na forma:

$$y(k)=\beta_0+\beta_1u(k)+\beta_2u^2(k)+...+\beta_nu^n(k)$$

Obs.: Não confundir “n” que é a ordem do polinômio com “N” que é a quantidade de observações!

Exemplo…

Caso tenhamos uma Caixa-Cinza em que se conhece o modelo do sistema, mas não seus parâmetros, pode-se montar a matriz Φ a seguir e resolver para os parâmetros β estimados:

$$y(k)=\beta_0+\beta_1\phi_1(u(k))+\beta_2\phi_2(u(k))+\ldots+\beta_n\phi_n(u(k))$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \varphi_1(u(0)) & \varphi_2(u(0)) & \cdots & \varphi_n(u(0)) \\ 1 & \varphi_1(u(1)) & \varphi_2(u(1)) & \cdots & \varphi_n(u(1)) \\ 1 & \varphi_1(u(2)) & \varphi_2(u(2)) & \cdots & \varphi_n(u(2)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_1(u(N)) & \varphi_2(u(N)) & \cdots & \varphi_n(u(N)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\hat{\beta}=(\phi^T\phi)^{-1}\phi^T y$$

Exemplo…

<u>Identificação de Sistemas Dinâmicos</u>

Seja o sistema dinâmico dado por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)+Du(k) \end{aligned} \qquad (1)$$

- As matrizes A, B, C e D são desconhecidas.
- As medidas y(k) e u(k) podem estar corrompidas pelos sensores.
- n (ordem) é desconhecida.

Queremos estimar o mais corretamente possível o modelo desse sistema, ou seja, A, B, C, D e n.

Consideraremos aqui que as medidas dos sensores são confiáveis (não ruidosas).

1ª abordagem: Caixa-Preta
Feita no domínio do tempo.
2ª abordagem: Caixa-Cinza
Feita no domínio da frequência utilizando o método dos Mínimos Quadrados com o conhecimento do número de polos e zeros.

Identificação Caixa-Preta
Vamos assumir algumas coisas:

- $u(k)=\begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k=1,2,\ldots,N \end{cases}$ um impulso unitário

- x(0)=0
- O sistema dado em (1) é controlável e observável.
- A entrada u(k) é rica o suficiente para obter a resposta dinâmica completa do sistema.
- Não há relação entre as entradas futuras e os estados passados.
- Por simplicidade vamos considerar o sistema SISO:
  m=p=1 m → nº de entradas p → nº de saídas

A identificação de um espaço de estados nunca é única. Diferentes A, B, C e D podem representar um mesmo sistema.

Procedimento

1º passo: defina M e N (M e N aqui são valores inteiros quaisquer. Não relacionados a número de entradas ou observações).

Os valores inteiros M e N devem ser tais que M + N – 1 < p

2º passo: defina a matriz H_1 (matriz de Hankel)

$$\mathbb{H}_1 = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & y(3) & \cdots & y(M-1) & y(M) \\ y(2) & y(3) & y(4) & \cdots & y(M) & y(M+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(i) & y(i+1) & y(i+2) & \cdots & y(M+i-2) & y(M+i-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y(N) & y(N+1) & y(N+2) & \cdots & y(M+N-2) & y(M+N-1) \end{bmatrix}$$

3º passo: realize a decomposição dessa matriz em seus valores singulares.

[U,S,V] = svd(H1) → no MATLAB

4º passo: determine 'n' pelo número de itens na diagonal de S_1 sendo a matriz S na forma:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

5º passo: determine U_1, V_1 e S_1 com 'n' na forma:

$$U_1 = (U(:,1:n))^T \qquad V_1 = V(1:n,:) \qquad S_1 = S(1:n,1:n)$$

6º passo: defina a matriz H2 na forma:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} y(2) & y(3) & y(4) & \cdots & y(n) & y(n+1) \\ y(3) & y(4) & y(5) & \cdots & y(n+1) & y(n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(i) & y(i+1) & y(i+2) & \cdots & y(n+i-2) & y(n+i-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y(n+1) & y(n+2) & y(n+3) & \cdots & y(2n-1) & y(2n) \end{bmatrix}$$

7º passo: defina as matrizes de observabilidade (O) e controlabilidade (K) definidas em termos de U_1, V_1 e S_1.

$$O=(S_1^{1/2}U_1)^T$$

$$K=S_1^{1/2}V_1$$

8º passo: encontre a matriz A estimada: Â

$$\hat{A}=O^{-1}H_2K^{-1}$$

Obs.: usar a função 'pinv' para a inversa caso ela não seja quadrada.

9º passo: encontre as estimativas das matrizes B e C: $\hat{B}\,e\,\hat{C}$

$\hat{B}$ → primeira coluna de K.
$\hat{C}$ → primeira linha de O.

Exemplo…

Escolha da frequência de amostragem
Uma regra normalmente utilizada é usar uma f_s que seja de 20 a 40 vezes a largura de banda do seu sistema em malha fechada. Obs.: quando o ADC do seu equipamento permitir!

Extra: Amostrando um sistema com impulso unitário em instantes de tempo definidos.
Seja o período de amostragem T=10s. Considere que o tempo vai até 50s por exemplo. Dado um sistema está em espaço de estados, obtenha as amostras de T em T dado um impulso unitário.

```
T=10s
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
sys=tf(num,den,T)
t=0:T:50;
i=impulse(sys,t)
```

o mesmo vale para degrau

```
d=step(sys,t)
```

Identificação pelos mínimos quadrados

Nesse método vamos considerar que a quantidade de polos e zeros do sistema são conhecidos.

Dessa forma podemos adiantar a forma da função de transferência.

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=G(z)=\frac{b_1 z^{n-1}+b_2 z^{n-2}+\ldots+b_{n-1} z+b_n}{z^n-a_1 z^{n-1}-\ldots-a_{n-1} z-a_n}$$

que resulta na equação de diferenças:

$$\begin{gathered} y(k)=a_1 y(k-1)+a_2 y(k-2)+\ldots+a_n y(k-n) \\ +b_1 u(k-1)+b_2 u(k-2)+\ldots+b_n u(k-n) \end{gathered}$$

conhecido como Modelo Média Móvel Autorregressivo (ARMA).

E o objetivo é encontrar o vetor dos coeficientes:

$$\theta=(a_1\, a_2 \ldots a_n\, b_1\, b_2 \ldots b_n)^T$$

por meio das medidas de u(k) e y(k).

Seja f(k) o vetor definido pelas medidas u(k) e y(k) organizado da seguinte forma:

$$f^T(k)=[y(k-1)\; y(k-2) \ldots y(k-n)\, u(k-1)\, u(k-2) \ldots u(k-n)] \qquad (1)$$

O número de observações N >= n e quanto mais melhor (limitado pelo experimento, recursos, etc).

$$y(N)=\begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \qquad F(N)=\begin{bmatrix} f^T(n) \\ f^T(n+1) \\ \vdots \\ f^T(N) \end{bmatrix} \qquad e(N)=\begin{bmatrix} e(n) \\ e(n+1) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}$$

Em que e(n) é o erro de estimação: diferença entre a saída verdadeira e a estimada pelo modelo encontrado.

Finalmente os coeficientes podem ser calculados fazendo:

$$\hat{\theta}_{LS}=[F^T(N) F(N)]^{-1} F^T(N)\, y(N)$$

Exemplo…

Para controlar o erro de estimação que pode ser grande (principalmente se houver *overfitting*), uma matriz de pesos pode ser utilizada.

$$\hat{\theta}_{WLS}=[F^T(N)\, W(N)\, F(N)]^{-1} F^T(N)\, W(N)\, y(N)$$

A escolha dessa matriz bem como melhores coeficientes finais podem ser obtidos de forma iterativa por técnicas de validação cruzada via *software*.

Exemplo…

MSE: Erro quadrático médio de estimação