Projeto de Controladores Digitais no Domínio da Frequência

Adrielle C. Santana

Função de Transferência Pulsada Senoidal

- Para se obter a resposta em frequência de uma função de transferência qualquer G(z) basta substituir cada $z = e^{j\omega T}$.

  A função G($e^{j\omega T}$) obtida é periódica tal como G(z), com período igual a T e é conhecida como **função de transferência pulsada senoidal**.

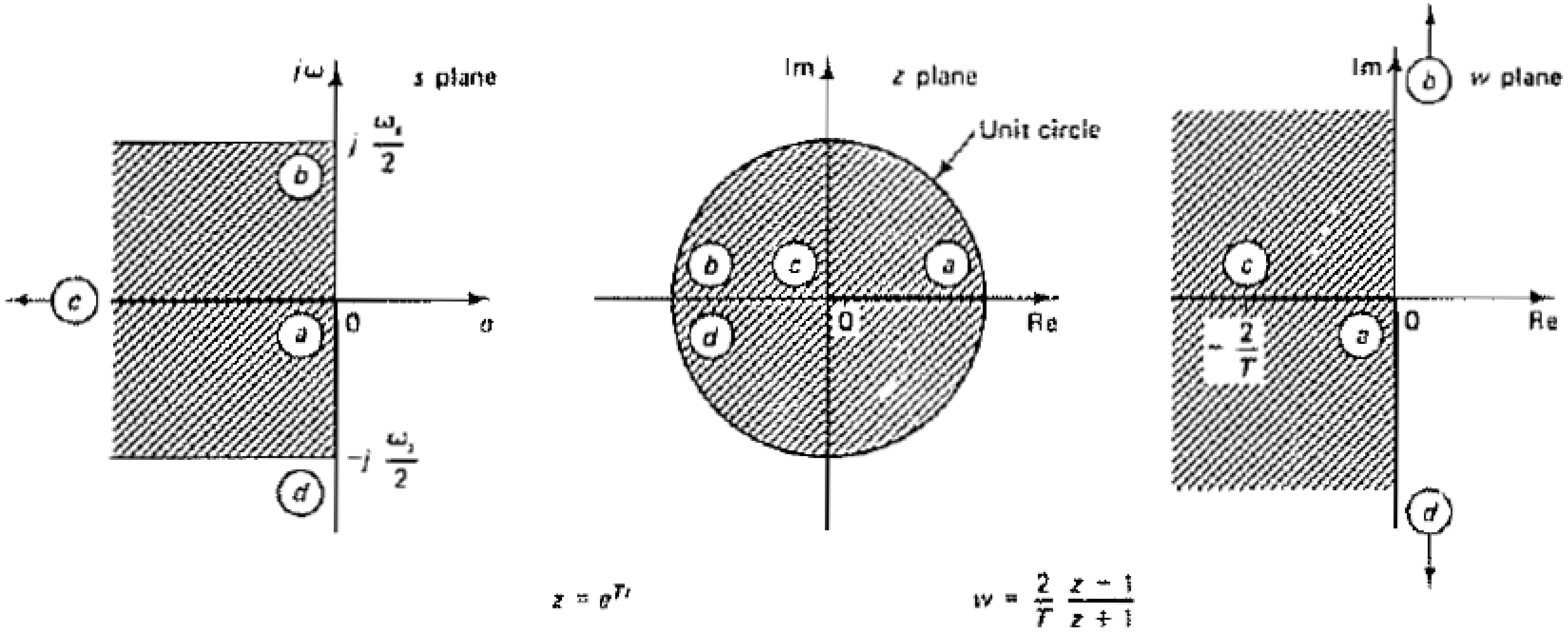
Transformação Bilinear

- A substituição $z = e^{j\omega T}$ acaba por atrapalhar um pouco a simplicidade que conseguiríamos no projeto de controladores no domínio da frequência. Para isso faz-se a transformação bilinear onde a função em z é transformada em uma função de transferência no plano w (não confundir com ω !!!)

Transformação Bilinear

A transformação consiste em:

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} \qquad\qquad w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$



Transformação Bilinear

- Observe que o mapeamento entre os planos s e w são bem parecidos mas, não são os mesmos. Note que enquanto s varia de 0 a $\frac{j\omega}{2}$ no seu eixo imaginário, w varia de 0 a ∞ em seu eixo imaginário.

  Assim a faixa de variação em s dada entre:

$$-\tfrac{1}{2}\omega_s \leq \omega \leq \tfrac{1}{2}\omega_s$$

  É mapeada na frequência ν em w como:

$$-\infty < \nu < \infty$$

Transformação Bilinear

- A relação entre as frequências ω do plano s e a frequência ν do plano w é dada por:

$$w\Big|_{w=j\nu} = j\nu = \frac{2}{T} j \tan\frac{\omega T}{2}$$

ou

$$\nu = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}$$

Transformação Bilinear

- A frequência ν é uma frequência fictícia criada pela transformação bilinear que desaparece após o projeto quando se faz a transformação inversa para o plano z.

  Exemplo:

  Obtenha G(w) para o a partir da função de transferência do sistema abaixo para T=0.1s:

Transformação Bilinear

Primeiro devemos obter a transformada z dessa função de transferência considerando o *zero order hold.*

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{10}{s+10}\right] \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{10}{s(s+10)}\right] \\ &= \frac{0.6321}{z-0\ 3679} \end{aligned}$$

Transformação Bilinear

A seguir, faz-se a transformação bilinear e obtém-se o G(w):

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w} = \frac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w}$$

$$G(w) = \frac{0.6321}{\dfrac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w} - 0.3679} = \frac{0.6321(1 - 0.05w)}{0.6321 + 0.06840w}$$

$$= 9.241\frac{1 - 0.05w}{w + 9.241}$$

Transformação Bilinear

A transformação não é perfeita mas, permite uma boa aproximação entre s e w de modo que é aceitável trabalhar com ela principalmente com pequenos períodos T.

No exemplo o polo em s era de s=-10. Em w o polo se encontra em w=-9.241. O ganho em s é de 10 enquanto que em w o ganho foi de 9.241. Ambos os valores bem próximos.

Um zero não existente em s apareceu em w=20. Seu efeito no sistema se torna menor quanto menor for o valor de T.

Diagrama de Bode

- Como aqui estaremos trabalhando com funções de transferência em w o diagrama de Bode que utilizaremos no projeto será desenhado com base no ganho e fase de G($j\nu$).

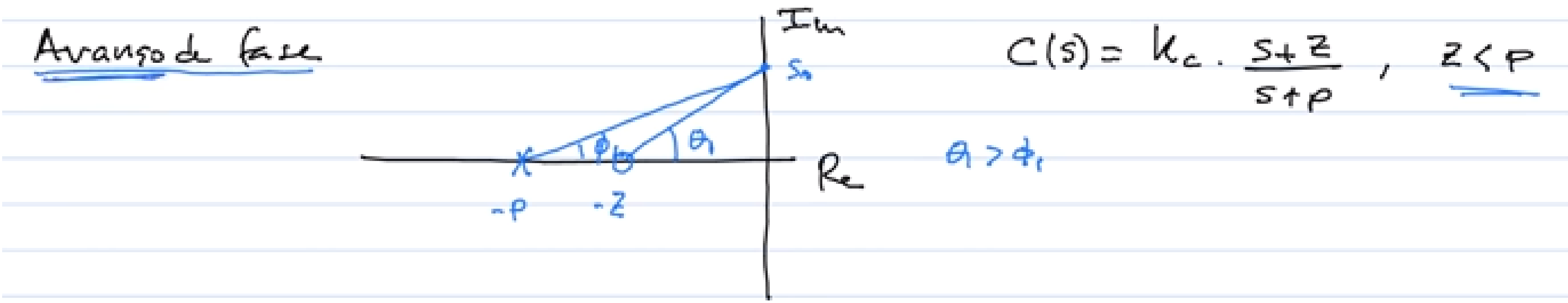
  Usando esse diagrama pode-se fazer o projeto de um compensador digital por métodos de projeto convencionais.

Compensação de Avanço, Atraso e de Avanço-atraso de Fase

O compensador por avanço de fase é utilizado para melhorar a estabilidade do sistema por a**umentar a largura de banda** do sistema e assim **aumentar a velocidade da sua resposta**.

Largura de banda: Banda de frequência na qual o módulo da função resposta em frequência não cai mais de 3dB em relação ao ganho de baixa frequência.

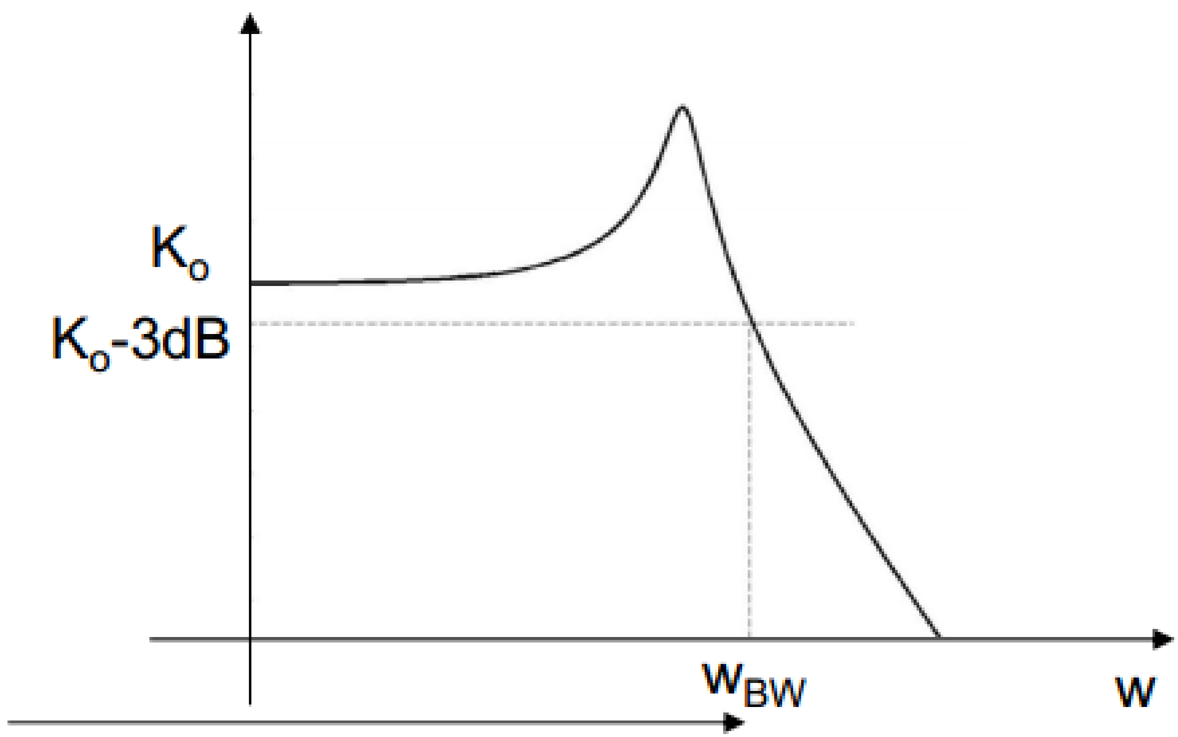
Compensação de Avanço, Atraso e de Avanço-atraso de Fase



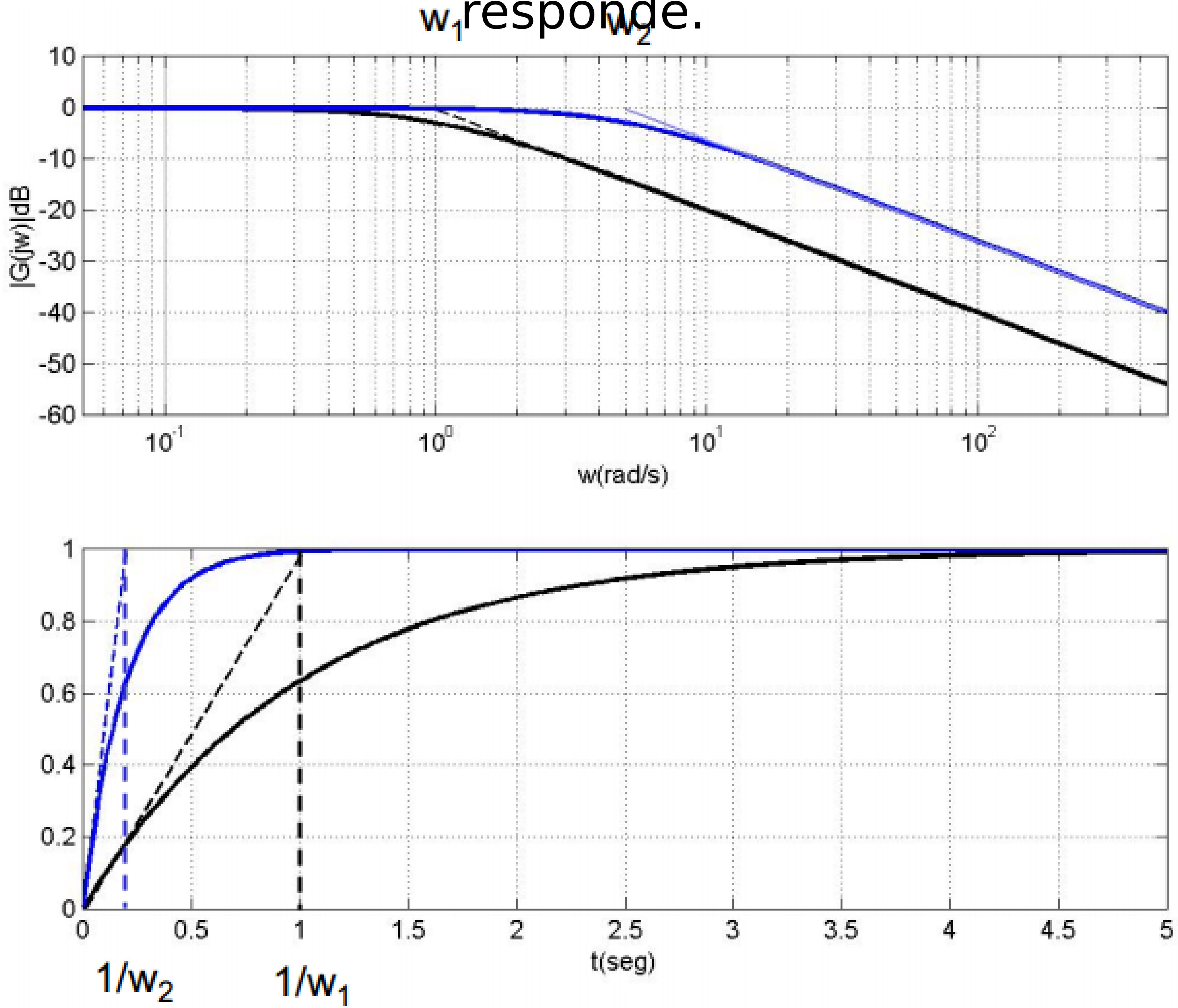
Como o ângulo do zero é maior que o ângulo do polo, temos uma fase positiva, por isso dizemos que temos um **avanço na fase** com esse controlador**.**

Compensação de Avanço, Atraso e de Avanço-atraso de Fase

A Largura de Banda traduz a capacidade de um sistema reproduzir mais ou menos perfeitamente os sinais aplicados à sua entrada.



Quanto maior a largura de banda mais rápido o sistema responde.

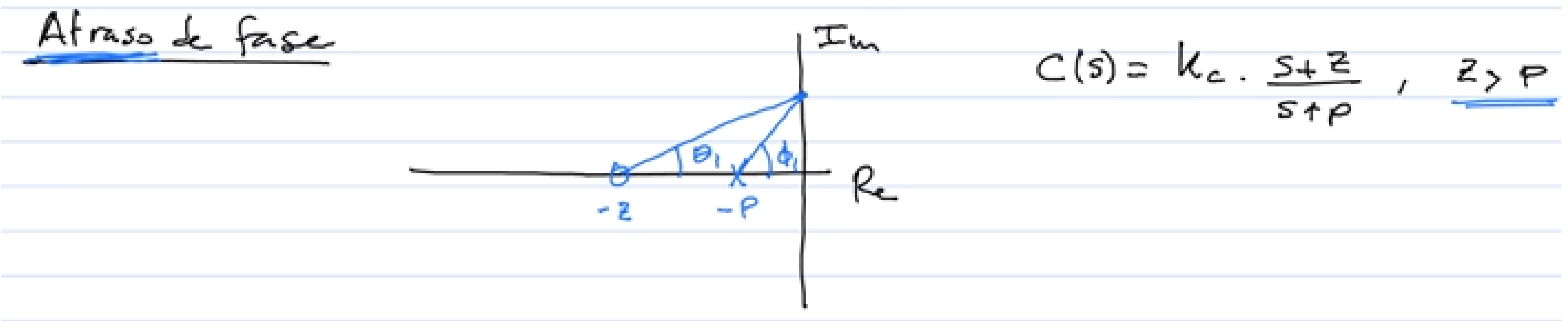


Compensação de Avanço, Atraso e de Avanço-atraso de Fase

O compensador por atraso de fase reduz o ganho em altas frequências atenuando os ruídos no sistema mas, tornando a resposta mais lenta ao causar uma redução na largura de banda.

Ele também causa o aumento do ganho a baixas frequências o que leva a um aumento da precisão em estado estacionário.

Compensação de Avanço, Atraso e de Avanço-atraso de Fase



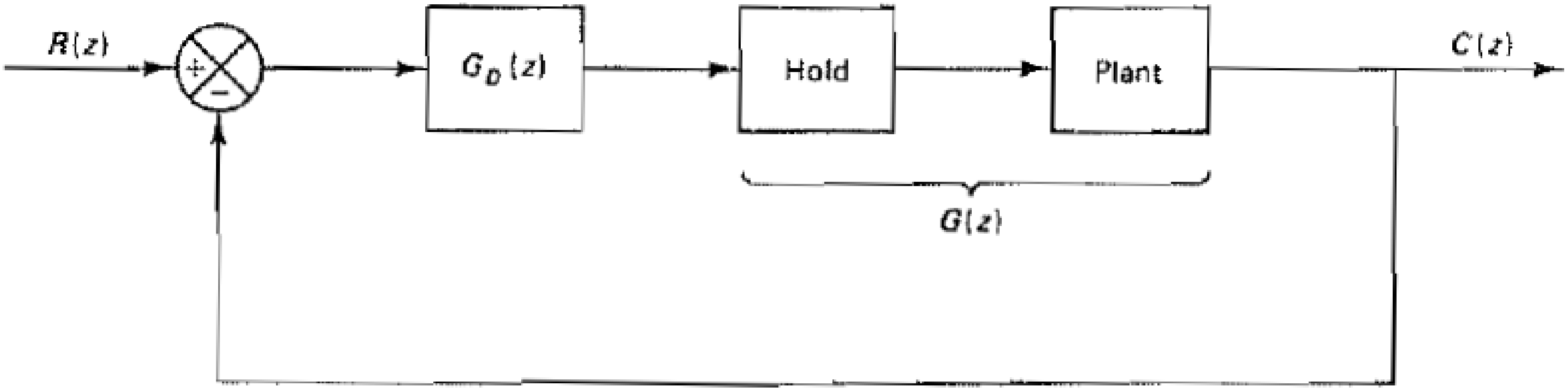
Agora o ângulo do polo é maior que o do zero. Logo temos uma fase resultante negativa. Dizemos então que esse é um **compensador por atraso de fase.**

Compensação de Avanço, Atraso e de Avanço-atraso de Fase

Um compensador por atraso-avanço de fase pode ser utilizado para que a redução da largura de banda causada pelo compensador por atraso de fase seja compensada pelo compensador por avanço de fase.

Procedimento de Projeto no Plano w

Considerando um sistema de controle digital na forma da figura abaixo o procedimento de projeto do controlador em w é:



Procedimento de Projeto no Plano w

1. Obter a transformada z da planta e fazer a transformação bilinear utilizando a relação vista:

$$z = \frac{1 + (T/2)w}{1 - (T/2)w}$$

A escolha do período de amostragem é importante pois, influencia na precisão da correspondência entre os planos s e w. Uma regra básica é tomar a frequência de amostragem como sendo 10 vezes a largura de banda do sistema em MF.

Processamento de sinais x controle digital

Procedimento de Projeto no Plano w

- 2. Substituir w = $j\nu$ e plotar o diagrama de bode para $G(j\nu)$.
  3. Ler do diagrama as constantes de erro estáticos se for de interesse e mais as margens de fase e de ganho.
  4. Utilizar técnicas convencionais de projeto de controladores contínuos para determinar os polos e zeros de $G_D(w)$ e assim obter a função de transferência de malha aberta: $G_D(w)G(w)$

Procedimento de Projeto no Plano w

5. Fazer a transformação bilinear inversa passando $G_D(w)$ para $G_D(z)$.

$$w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

6. Realizar os procedimentos para programar a função de transferência pulsada do controlador onde for de interesse que ele atue.