NOTA I

MEDIDAS E ERROS

O estudo de um fenômeno natural do ponto de vista experimental envolve algumas etapas que, muitas vezes, necessitam de uma elaboração prévia de uma seqüência de trabalho. Antes de qualquer coisa deve-se ter clareza sobre o problema que se pretende estudar, ou seja, ter um entendimento da proposta de estudo. Para isto é fundamental que se consiga elaborar os objetivos pretendidos.

Obviamente, antes de se começar a realizar o experimento propriamente, o material necessário à sua montagem (equipamentos e instrumentos, ferramentas de cálculo e tratamento de medidas, etc.) deve estar preparado e colocado em um ambiente adequado. Após a determinação das etapas a serem desenvolvidas e a maneira de desenvolvê-las, ou seja, o procedimento a ser seguido, passa-se à sua realização. É comum, sobretudo em ciências exatas, a coleta de informações através da realização de um conjunto de medidas. O resultado dessas medidas passa por uma análise devendo, posteriormente, ser preparado para apresentação (tabelas, gráficos, tratamento matemático).

O presente texto pretende servir como um guia introdutório, resumido e de rápido acesso, para os estudantes das disciplinas experimentais oferecidas pelo Departamento de Física/UFMG. Não se tem aqui a intenção de ser completo e exaustivo; algumas referências bibliográficas serão dadas no sentido de permitir um aprofundamento maior em alguns pontos, caso seja do interesse do estudante.

I.1 - MEDIDAS DIRETAS E INDIRETAS

Conforme foi dito anteriormente, em ciências exatas a coleta de informações é comumente feita através da realização de um conjunto de medidas de grandezas relacionadas direta ou indiretamente com a análise do fenômeno em questão.

Medir uma grandeza significa compará-la com uma outra de mesma natureza, escolhida como *unidade*. O resultado dessa comparação denomina-se *medida* da grandeza e nela estão contidas três informações:

- o *valor numérico*, que é um número inteiro ou fracionário;
- a *precisão*, expressa pelo número de algarismos significativos;
- a *unidade* correspondente adotada.

O sistema de unidades normalmente utilizado é o Sistema Internacional (SI). O apêndice traz uma relação das unidades fundamentais neste sistema, assim como os valores de algumas grandezas físicas e notações utilizadas.

Em experimentos realizados com uma qualidade aceitável, as medidas são feitas com instrumentos calibrados tais como réguas, paquímetros, balanças, cronômetros, voltímetros, termômetros e muitos outros. A menor graduação do instrumento representa o menor valor que ele é capaz de medir com certeza. Por exemplo, não faz sentido querer medir o diâmetro de um fio de cabelo usando uma régua graduada em milímetros. A maior precisão que se pode ter de uma medida realizada com esta régua, é uma precisão de milímetro, podendo-se estimar o valor entre duas divisões.

Vejamos o caso de medirmos o diâmetro de uma moeda de 1 real com uma régua milimetrada. O resultado obtido é:

$$d = 27{,}2 \text{ mm}$$

O resultado tem 3 algarismos significativos, sendo os números 2 (primeiro) e o 7 são certos, e o último 2 é *incerto ou duvidoso*. Esta medida se trata do caso de uma ***medida direta***, onde foi feita uma comparação direta do diâmetro da moeda com da régua (instrumento que mede comprimento).

Qualquer medida tem-se, em geral, apenas UM algarismo duvidoso!!!

Poderíamos escrever o resultado usando outra unidade de comprimento, como, por exemplo, o metro (m). Neste caso, temos:

$$d = 0{,}0272 \text{ m} \quad \text{ou} \quad d = 2{,}72 \times 10^{-2} \text{ m } (^{*}) .$$

Em ambos os casos, continuam tendo 3 algarismos significativos, sendo o duvidoso na casa dos décimos de milímetro.

Ou seja, o simples fato de mudar a unidade escolhida para descrever um resultado não pode alterar a sua precisão. Os algarismos “zero” que aparecem antes do primeiro algarismo diferente de zero não são significativos, depois sim! Sendo assim, não é correto escrever d = 27,20 mm pois, nesse caso, teríamos 4 algarismos significativos com o algarismo duvidoso sendo o zero. Nessa situação o resultado expressaria uma precisão centésimo de milímetro, que a régua não tem! Poderia dizer que numericamente é “*a mesma coisa*”, mas do ponto de vista científico não é. Não se pode alterar a precisão de um resultado acrescentando algarismos significativos a ele.

Mudar a unidade escolhida para descrever um resultado não pode alterar a sua precisão!!!

Supomos que numa experiência precisemos calcular o perímetro *p* da moeda de 1 real. A partir da medida do diâmetro,temos que $p = 2\pi r$, sendo *r* o raio da moeda. Assim, tem-se

$$p = 2 * 3{,}1416 * 1{,}36 = 85{,}5 \text{ mm}$$

Neste caso, podemos dizer que foi feita uma ***medida indireta*** do perímetro da moeda. Uma vez que a grandeza medida diretamente foi o diâmetro da moeda, e a partir dele é que se calculou o perímetro. Seria possível medir diretamente o perímetro da moeda utilizando-se uma fita métrica flexível, mas não foi esse o caso. Outra grandeza indireta que poderia ser encontrada a partir do diâmetro da moeda é a área de sua face ($S = \pi r^2$). Teríamos $S = 5{,}81 \text{ mm}^2$.

Observe que foi mantido o número de três algarismos significativos para os resultados obtidos tanto para o perímetro quanto para a área.

O valor do diâmetro da moeda apresentado é o resultado de uma medida feita por uma única pessoa. Se outras pessoas realizarem esta medida, provavelmente, encontraram outros valores ligeiramente diferentes, ou mesmo a própria pessoa, ao realizar a medida várias vezes, pode encontrar um conjunto de valores diferentes entre si. Estes valores estarão distribuídos em torno de um determinado valor, denotado valor médio ou valor mais provável para a grandeza. Discutiremos este assunto no próximo item.

---

[*] ***Notação científica ou exponencial:*** Para se evitar o transtorno de escrever e manipular muitos zeros no valor numérico associado a uma grandeza física utiliza-se a notação científica. Abaixo alguns exemplos de números na notação cientifica:

$$31.560.000 \text{ s (1 ano)} = 3{,}156 \times 10^{7} \text{ s} \quad 256{,}4 \text{ m/s} = 2{,}564 \times 10^{2} \text{ m/s}$$

$$0{,}0000003169 \text{ anos (1 s)} = 3.169 \times 10^{-7} \text{ s} ,$$

onde o expoente é positivo para grandezas grandes e negativo para grandezas pequenas.

I.2 - *VALOR MAIS PROVÁVEL DE UMA MEDIDA E SEU ERRO (DESVIO)*

I.2.1 - Medida direta e seu erro

Suponhamos que quatro pessoas tenham medido o diâmetro da moeda anterior, e encontraram os seguintes valores:

27,2 mm; 27,0 mm; 27,3 mm e 27,2mm.

Podemos observar que se repetirmos a medida de uma grandeza várias vezes não são encontrados valores sempre iguais. Os diferentes valores obtidos podem ser devidos: à habilidade de quem realizou as medidas, ao instrumento utilizado, ao método empregado, às dificuldades intrínsecas do processo, etc.

> As flutuações nos valores medidos são chamadas de erro, incerteza ou desvio.

Durante um processo de medida podem ocorrer ***erros sistemáticos*** e ***erros aleatórios***.

Os e*rros sistemáticos* são devidos aos problemas de fabricação ou calibração de um aparelho ou a um erro de procedimento. Quando acontece este tipo de erro os valores encontrados das medidas são afetados sistematicamente "para mais" ou sistematicamente "para menos". Para exemplificar, vamos considerar a medida do comprimento de um objeto com uma régua de metal. Num dia mais quente, esta régua dilata, sendo cada milímetro da escala maior neste dia que o milímetro no dia mais frio. Como conseqüência direta, uma medida do comprimento de um objeto (que dilate menos que a régua), será sistematicamente menor quando o dia foi mais quente do que quando a régua foi calibrada. Neste caso a régua não estando mais calibrada, apesar de precisa, fez com que todas as medidas fossem inferiores ao valor real.

Os e*rros aleatórios*, também chamados estatísticos, afetam desordenadamente a medida, ora para mais ora para menos. Este tipo de erro é intrínseco a qualquer processo de medida e é importante saber calculá-lo ou estimá-lo para que o resultado final de um trabalho experimental seja expresso corretamente.

No caso de medidas diretas, os desvios podem ser facilmente encontrados. Quando se realiza uma única medida de uma grandeza, o desvio pode ser encontrado usando diferentes procedimentos mas é sempre importante **usar o bom senso**. Uma regra amplamente difundida é a de que, no caso de medida única, o desvio (erro de leitura) deve ser a metade da menor divisão da escala do instrumento de medida.

> Exemplo: Medir a largura l de uma folha de papel A4 com uma régua milimetrada de 300 mm. No caso o desvio é a metade da menor divisão, ou seja, 1 mm/2 = 0,5 mm. Assim a medida da largura da folha seria escrita como:
>
> $$l = (211,5 \pm 0,5)\ \text{mm}$$
>
> O resultado indica que a largura da folha de papel é 211,5 mm com uma incerteza de 0,5 mm, ou seja, a largura do papel está compreendida no intervalo de 211,0 mm e 212,0 mm.

Entretanto, se essa régua for usada para medir a altura da porta da sala de aula, é claro que o desvio não mais poderá ser de 0,5 mm. O procedimento de posicionar a régua várias vezes para completar a medida eleva muito o erro na determinação da altura da porta, devendo este ser da ordem de centímetro. No caso seria mais adequado utilizar uma régua maior ou uma fita métrica.

Quando se usa um voltímetro analógico ou qualquer instrumento com ponteiro, tem-se que prestar atenção se a leitura é estável ou se o ponteiro oscila em torno de um valor. Se o aparelho indicar um valor fixo, pode-se considerar como desvio à própria precisão do instrumento ou, no caso de não se ter essa informação, usar uma unidade (ou a metade) da menor divisão da escala utilizada. Se houver oscilação, é razoável calcular o desvio a partir dos limites desta oscilação: o resultado da medida poderá ser qualquer valor dentro da faixa de oscilação! No caso de aparelhos digitais, também pode acontecer do resultado se manter constante, sem flutuações, ou se apresentar oscilando. A avaliação do desvio deverá ser feita aqui como no caso anterior.

Para se obter um valor mais provável de uma grandeza física é aconselhável realizar várias medidas da mesma grandeza para se encontrar um resultado mais preciso.

Suponhamos tenha-se medido N vezes uma grandeza física X, e foram obtidos os valores X_1, X_2, ..., X_N. O valor mais provável desta grandeza X é dado por:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} X_i \quad \text{(I-1)}$$

Cada uma destas grandezas apresenta um erro absoluto em relação à média: $X_1 - \overline{X}$, $X_2 - \overline{X}$, ..., $X_N - \overline{X}$. Para calcular o erro médio absoluto da grandeza, usamos a seguinte fórmula:

$$\boxed{\Delta\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N}(X_i - \overline{X})} \quad \text{(I-2)}$$

No caso da moeda de 1 real, teremos o valor mais provável do diâmetro *d* e o respectivo desvio dado por:

$$\overline{d} = \frac{(27{,}2 + 27{,}0 + 27{,}3 + 27{,}2)\text{mm}}{4} = 27{,}175 \text{ mm}$$

$$\Delta\overline{d} = \frac{(|+0{,}025| + |-0{,}175| + |+0{,}125| + |0{,}025|)}{4} = 0{,}0875 \text{ mm}.$$

Assim, respeitando-se o critério de se escrever o desvio com um algarismo significativo, a resposta correta para o resultado encontrado para o diâmetro da moeda é:

$$d = \overline{d} \pm \Delta d = (27{,}18 \pm 0{,}09) \text{ mm } (^{+})$$

Deve-se observar que a realização de medidas de uma grandeza várias vezes pode melhorar a precisão na sua determinação. O valor de uma grandeza com o seu respectivo desvio escrito dessa maneira esta indicando um intervalo de valores aceitáveis para ela, ou seja, o valor do diâmetro da moeda está compreendido no intervalo entre 27,09 mm e 27,27 mm com o valor mais provável de 27,18 mm.

No resultado encontrado anteriormente, estão expressos o valor do diâmetro e seu ***erro absoluto***, ou seja, o diâmetro da moeda foi determinado como sendo 27,18 mm com um *desvio absoluto* de 0,09 mm. O erro absoluto deve conter somente um algarismo significativo, pois se o primeiro algarismo já indica uma incerteza na respectiva casa decimal, quaisquer algarismos em casas à direita desta são ilusórios.

O erro ou desvio de uma grandeza deve conter apenas um algarismo significativo!!!

A ***precisão*** de uma medida é inversamente proporcional ao seu erro relativo, quanto menor o erro relativo maior é a precisão, e vice-versa. O ***erro relativo*** de uma medida X é definido como o quociente de seu erro absoluto $\Delta\overline{X}$ pelo seu valor mais provável $\overline{X}$:

[+] Ao arredondar um valor numérico, se o primeiro algarismo a ser cortado for igual ou superior a 5, aumenta-se de 1 ao algarismo anterior. Em caso contrário, o algarismo anterior não se altera. Ex.: 0,08~~75~~ = 0,09; 1,26~~2~~ = 1,26; 5,3~~5~~ = 5,4.

$$Er = \frac{\Delta\overline{X}}{\overline{X}} \qquad \text{(I-3)}$$

O desvio relativo é quem indica melhor a precisão da medida, sendo comum expressá-lo em termos percentuais.

Suponha uma situação em que se meça a espessura da moeda acima, encontrando-se como resultado $e = \overline{e} \pm \Delta e = (1{,}45 \pm 0{,}09)$ mm. O valor da espessura é bem menor que o diâmetro, mas o desvio absoluto é o mesmo. Assim, o erro relativo para o diâmetro é de aproximadamente 0,003 ou 0,3%, e de 0,062 ou aproximadamente 6% para a espessura. Comparando-se os desvios relativos, pode-se ver que o diâmetro foi determinado com maior precisão.

I.2.2 – Medida indireta e seu erro

Uma medida indireta é obtida a partir de expressões matemáticas que a relacionam com outras grandezas medidas diretamente. De maneira geral, uma grandeza f será função de outras grandezas x, y, z, t, etc., cada uma com seu erro:

$$f = f\,(x \pm \Delta x,\ y \pm \Delta y,\ z \pm \Delta z,\ t \pm \Delta t,\ \ldots)$$

Ao expressar um resultado obtido indiretamente a partir de cálculos é importante apresentar também o seu desvio associado, ou seja, o resultado da propagação dos erros.

O ***erro absoluto de uma medida indireta*** é uma aplicação elementar de cálculo diferencial. Como vocês, estudantes de Farmácia não cursaram a disciplina de Cálculos Diferenciais I, o cálculo de erros será realizado através do uso de regras, que são elas:

I. Se f é a **soma** ou **subtração** de grandezas x, y, z, … então, o erro absoluto de Δf é a soma dos erros absolutos das grandezas x, y z, ... $\Delta f = \Delta x + \Delta y + \Delta z + \ldots$
II. Se f é a **multiplicação** de uma grandeza x por uma constante k, então, o erro absoluto de f é k vezes o desvio absoluto da grandeza x $\Delta f = k\,\Delta x$
III. Se f é a **divisão** de uma grandeza x por uma constante k então, o desvio absoluto em f é o desvio absoluto da grandeza x dividido por k. $\Delta f = \Delta x / k$
IV. Se f é a **multiplicação** ou **divisão** de grandezas x, y, z,... então, o desvio relativo em f é a soma dos desvios relativos das grandezas x, y, z …
$$\Delta f / f = \Delta x / x + \Delta y / y + \Delta z / z + \ldots$$
V. Se f é a **potência** n de uma grandeza x (x^n), então, o desvio relativo em f é n vezes o desvio relativo da grandeza x. $\Delta f / f = n\,\Delta x / x$. Caso tenha uma constante k multiplicando a potência de uma grandeza x, não a considere no cálculo.

Considere um corpo se desloca em linha reta com aceleração constante, de tal forma que a distância percorrida X (em metros) varia com o tempo t (em segundos) de acordo com a equação

$$X = 5\,t^2 \qquad \text{(I-4)}$$

Como exemplo de aplicação das regras acima, coloca-se a seguinte questão: após um tempo medido de $t = (7{,}5 \pm 0{,}4)$ s, qual a distância percorrida pelo corpo e seu respectivo erro absoluto?

A primeira resposta para a questão é X = 281,25 m. Entretanto, do ponto de vista de tratamento de medidas, esta resposta está incompleta e incorreta, precisamos calcular o erro absoluto da distância.

Usando a regra V para determinar o erro absoluto ΔX, temos:

$$\Delta X / X = 2 * \Delta t / t\ ;$$

ou seja, $\Delta X = 10 * t * \Delta t = 10 * 7{,}5 * 0{,}4 = 30$ m.

Então,

$$X = (2{,}8 \pm 0{,}3) \times 10^2 \text{ m.}$$

Lembrando que o erro usa-se apenas um algarismo significativo, foi necessário o uso de potência de dez para expressar o resultado acima. Calculando o erro relativo teríamos um valor de 11%.

Procuremos agora determinar o erro para uma grandeza que dependa de várias variáveis, ou seja, depende da medida de várias outras grandezas com seus respectivos erros. Como exemplo, consideremos a situação em que foram medidas a massa *m* e a velocidade v de um carro e deseja-se calcular a sua energia cinética e seu respectivo erro. Sendo $m = (1{,}2 \pm 0{,}1) \times 10^3$ Kg e $v = (20{,}0 \pm 0{,}5)$ m/s, e sabendo que a energia cinética *E* é dada por $E = \frac{1}{2} m v^2$, temos o valor da energia:

$$E = 2{,}4 \times 10^5 \text{ J}$$

Usando as regras IV e V, o erro absoluto ΔE é dado por:

$$\Delta E / E = \Delta m / m + 2 * \Delta v / v \Rightarrow \Delta E = 0{,}3\cancel{19} \times 10^5 = 0{,}3 \times 10^5 \text{ J}$$

Assim, a energia cinética é dada por:

$$\Delta E = (2{,}4 \pm 0{,}3) \times 10^5 \text{ J.}$$

Os cálculos de desvios, cada vez mais, estão sendo feitos com a ajuda de calculadoras e programas de computador. Entretanto é de grande importância que o "experimentador" tenha uma boa noção dos processos empregados nesses cálculos e ainda saiba, usando o bom senso, estimar a precisão de um resultado.

I.2.3- Precisão e confiabilidade de uma medida

Os conceitos de precisão e de confiabilidade são, freqüentemente, confundidos. Uma medida pode ser muito precisa e não ser confiável, por exemplo, quando for feita usando um instrumento de alta precisão, porém descalibrado. O contrário também pode acontecer. É importante, portanto, distinguir os dois conceitos: uma medida confiável é aquela onde os *erros sistemáticos* são muito pequenos; uma medida precisa é aquela onde os *erros aleatórios* são muito pequenos.