Universidade Federal de Ouro Preto
1ª Lista de Cálculo III/MTM124
Professor: Antônio Marcos da Silva

Observação: A maioria destes exercícios foram tirados da lista do prof. Wenderson.
Justifique detalhadamente todos os cálculos.

0. Reveja os exemplos feitos em sala.

1. Calcule as seguintes integrais iteradas. Se necessário inverta a ordem de integração.

   (a) $\int_0^1 \int_0^{\pi} (1+x)\sec^2 y \, dydx$ (b) $\int_0^1 \int_0^{x} (1+x) \, dydx$

   (c) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (2x-y) \, dydx$ (d) $\int_0^1 \int_y^{1} \frac{1}{1+x^4} \, dxdy$

   (e) $\int_{-1}^3 \int_{x^2}^{2x+3} x \, dydx$ (f) $\int_{-2}^2 \int_{x^2}^{4} x^2 y \, dydx$

   (g) $\int_0^1 \int_{y^{\frac{1}{3}}}^{1} e^{\frac{y}{x}} \, dxdy$ (h) $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \, dydx$

   (i) $\int_{-2015}^{2015} \int_{102}^{999} e^{-(x^2+9y^2)} \operatorname{sen}(y^{11}) \, dxdy$ (j) $\int_D \int \frac{x}{x^2+y^2} \, dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1\}$

   (l) $\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 dydx$.

   Resp.: a)0 b)5/6 c)1/20 d)$\pi/8$ e) 32/3 f) 512/21 g) -1 + e/2 h) 2 i) 0 j) 0 l) (1- $\cos 1$)/2.

2. Represente geometricamente e determine o valor da área delimitada entre as curvas e compreendida entre elas, utilizando integrais duplas:

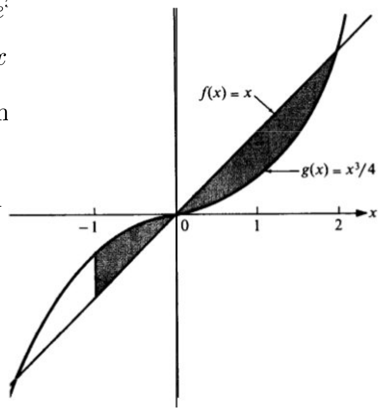
   (a) $x = y^3,\ x+y=2,\ y=0$ (b) $y = e$

   (c) $x = y^2,\ y = 2-x,\ y=0$ (d) $y = x$

   (e) $y = 2x,\ y = x,\ y = \frac{2}{x}$ (f) $y = \ln$ o quadrante.

   Resp.: a)5/4 b)$e^{\pi} - e^{-\pi}$ c)5/6 d)arctg $a - \frac{a^3}{3}$, em

3. Use integral dupla para determiar a área da região



4. Determine, por integração dupla, o volume do tetraedro do primeiro octante delimitado pelos planos coordenados e pelo plano de equação $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, em que a, b e c, são constantes positivas. **Resp.:** $\frac{abc}{6} uv$.

5. Utilizando integrais duplas, determine o volume dos sólidos a seguir:

   (a) abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região limitada por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

   (b) delimitado por $x^2 + z^2 = 9$, $z = 2x$, $y = 0$, $y = 20$ e $z = 0$ e compreendido entre elas no primeiro quadrante.

   (c) delimitado por $x^2 + z^2 = 9$, $y = 2x$, $z = 0$ e $y = 0$ no primeiro octante.

   (d) abaixo do cilindro $z = x^2$ e acima da região do plano delimitada por $y = x^2$ e $y = 1$.

   (e) abaixo de $z = y + e^x$ e acima da região do plano delimitada e compreendida entre $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 2$.

   Resp.: a)2 b)90 arctg 2 c)18 d)4/15 e) $2e$

6. Determine o volume da parte do primeiro octante do sólido delimitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$ e compreendido entre eles. **Resp.:** $\frac{2}{3}$.

7. Através de integrais duplas, determine o volume do sólido delimitado pelo plano xy e pelo parabolóide $z = 25 - x^2 - y^2$ e compreendido entre eles. **Resp.:** $\frac{625}{2}\pi$.

8. Determine as integrais abaixo utilizando coordenadas polares:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\, dydx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\, dxdy$

9. Usando integrais duplas, determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$. **Resp.:** $2\pi/3$

10. (a) Calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Sugestão: Faça $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ e use coordenadas polares para determinar I^2. **Resp.:** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

(b) Use o item anterior para calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\, dt$. **Resp.:** 1.

11. Determine o volume da esfera de raio a usando integrais duplas e triplas.

12. Obtenha o volume do sólido delimitado pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 4 - 3x^2 - 3y^2$. **Resp.:** 2π

13. Determine o volume do "sorvete"delimitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$. **Resp.:** $\dfrac{\pi}{3}a^3\left[2-\sqrt{2}\right]$.

14. Escrever em coordenadas polares:

(a) $x^2 + y^2 = 4$ (b) $x = 4$ (c) $y = k$, $k \in \mathbb{R}$
(d) $x = y$ (e) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (f) $x^2 + (y-3)^2 = 9$

Resp.: a)$r = 2$ b) $r = 4\sec\theta$ c) $r = k \operatorname{cossec}\theta$ d)$\theta = \pi/4$ e) $r = 2\cos\theta$ f) $r = 6\operatorname{sen}\theta$

15. Escrever em coordenadas cartesianas:
(a) $r = \cos\theta$ (b) $r = 2\operatorname{sen}\theta$ (c) $r = \dfrac{2}{3\cos\theta - 5\operatorname{sen}\theta}$
(d) $r = 3$ (e) $r = \operatorname{cossec}\theta$ (f) $r = 1 + 2r\cos\theta$

Resp.: a)$x^2 + y^2 = x$ b)$x^2 + y^2 = 2y$ e) $y = 1$ f) $y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$

16. Esboce o gráfico das curvas abaixo no plano polar: (Sugestão: THOMAS, G. B., Cálculo 2, Ed. Pearson).
(a) $r = \theta$ (Espiral de Arquimedes) (b) $r = \cos 2\theta$ (Rosácea de quatro pétalas)
(c) $r = 2 + 2\cos\theta$ (Cardióide) (d) $r = 2\sec\theta$ (reta)

17. Determine as áreas por integração dupla em coordenadas polares:
(a) Área do círculo de raio 1;
(b) Área limitada pelo cardióide $r = 1 + \cos\theta$; (c) Área exterior ao círculo $r = 1$ e interior a $r = 2\operatorname{sen}\theta$.
Resp.: a. π; b. $\dfrac{3}{2}\pi$; c. $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

18. Use integrais duplas para calcular a área de um laço de $r = 2a\cos 2\theta$. **Resp.:** $a^2\pi/2$.

19. Determine a área da região do primeiro quadrante do plano xy delimitado pelas curvas $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = \sqrt{3}x$ e $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$. **Resp.:** $\pi/4$.

20. Considere a integral $\displaystyle\int_R\int e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dxdy$, em que R é a região do plano xy delimitada e compreendida entre as retas $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x = 0$ e $y = 0$. Faça o que se pede:
(a) Obtenha x e y em função de novas variáveis e calcule o determinante Jacobiano relativo a ela. Sugestão: Considere: $u = y - x$ e $v = y + x$. **Resp.:** J = -1/2
(b) Reescreva e represente a região de integração nas novas coordenadas e determine os limites de integração.
(c) Utilize o Teorema da Mudança de Variáveis para calcular a integral. **Resp.:** $3/4(e - e^{-1})$

21. Utilize o Teorema da Mudança de Variáveis para calcular $\int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}}\, dxdy$. Sugestão: Faça $x = \dfrac{u}{v}$ e $y = uv$.
Resp.: $2e(e-2)$.

22. Calcule:
(a) $\displaystyle\int\int\int_Q 3xy^3z^2\, dV$, $Q = \{(x,y,z); -1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$
(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1+x}^{2x} \int_z^{x+z} x\, dydzdx$
(c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2y\, dzdydx$

23. Determine $\displaystyle\int\int\int_T f(x,y,z)\, dV$, em que:
(a) $f(x,y,z) = x+y+z$; $T = \{(x,y,z); 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1\}$.
(b) $f(x,y,z) = x^2$; T é o tetraedro delimitado pelos planos coordenados no primeiro octante e pelo plano $x+y+z=1$.
(c) $f(x,y,z) = x^2$; T é o tetraedro do primeiro octante delimitado pelos planos $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{!}{2}$, $z = 0$ e $x+y+z=1$.
(d) $f(x,y,z) = xyz$; T situa-se abaixo da superfície $z = 1-x^2$ e acima do retângulo $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.
(e) $f(x,y,z) = x+y$; T é a região entre as superfícies $z = 2-x^2$ e $z = x^2$ para $0 \leq y \leq 3$.
Resp.: a) 18 b) 1/60 c) 31/1920 d) 0 e) 12

24. Determine o volume do sólido situado abaixo do plano $z = 4$ e acima do parabolóide $z = x^2+y^2$. **Resp.:** 8π

25. Determine a massa do cilindro $0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq h$, sabendo-se que sua densidade em (x,y,z) é a distância de tal ponto ao plano xy.

26. Determine, primeiro utilizando coordenadas cilíndricas e depois coordenadas esféricas, o volume da região interior à esfera de centro na origem e raio 2 e ao cilindro $x^2+y^2=1$. **Resp.:** $\dfrac{4\pi}{3}(8-3\sqrt{3})$

27. (a) Determine o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c} = 1$, $a,b,c > 0$, da seguinte forma: Faça a mudança de variáveis que permita reescrever o elipsóide como uma esfera de raio 1 e obtenha o determinante Jacobiano dessa mudança. Use o Teo. da Mudança de Variáveis para determinar o volume do elipsóide. **Resp.:** Mudança: $x = au$, $y = bv$ e $z = wc$, $\|J\| = abc$. $V = \dfrac{4}{3}\pi abc$.
(b) Determine, utilizando coordenadas esféricas, o volume da esfera de raio a e verifique se há coerência com o caso $a = b = c$.
(c) A terra não é perfeitamente esférica, aproximando-se mais de um elipsóide com $a = b \approx 6378$ Km e $c \approx 6356$ Km. Estime o volume da Terra.

28. Determine o volume do sólido delimitado pelas esferas $x^2+y^2+z^2=9$ e $x^2+y^2+z^2=16$, sendo $y \geq 0$.

29. Usando coordenadas esféricas, calcule as integrais a seguir:
(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} x^2+y^2+z^2\, dzdydx$
(b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dzdxdy$
Resp.: a. $\dfrac{128\pi}{5}(2\sqrt{2}-2)$ b. $4\pi(2-\sqrt{2})$

30. Determine a área da superfície da:
(a) esfera de raio a;
(b) parte do parabolóide hiperbólico $z = x^2-y^2$ que está entre os cilindros $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$. **Resp.:** $\dfrac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$.

31. Determine o centro de massa do tetraedro do primeiro octante limitados pelos planos coordenados e pelo plano $x+y+z=2$, sendo que a densidade $\rho(x,y,z)$ em cada ponto igual a distância de tal ponto ao plano xy. **Resp.:** $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$.