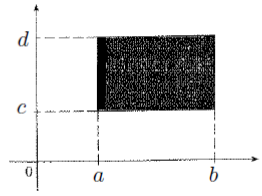
Universidade Federal de Ouro Preto
Professor: Antônio Marcos da Silva

Aula 02: Integrais Duplas sobre Retângulos - Introdução

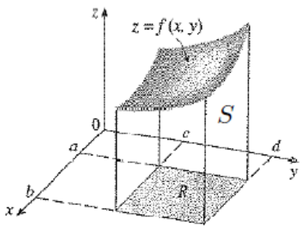
Observação: A partir de agora usaremos a notação $R = [a, b] \times [c, d]$ para nos referirmos à região retangular R cujo um dos lados varia de a até b, e o outro, de c até d. Isto é, ao retângulo abaixo:



Sejam D um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ contendo R e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = z$, uma função de duas variáveis, contínua em R e positiva (ou seja, $f(x, y) \geq 0$ para todo ponto $(x, y) \in D$). Suponhamos que S represente o sólido delimitado pela região R e pelo gráfico da função f. Em outras palavras,

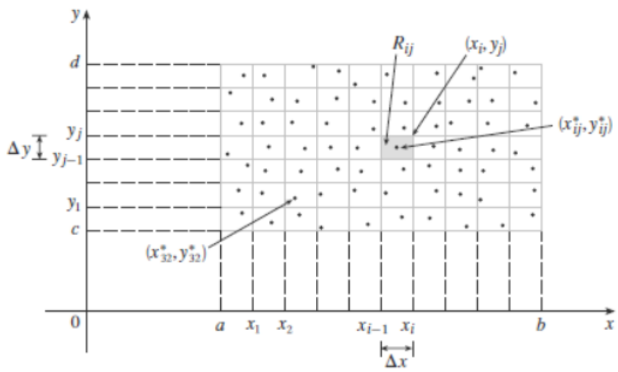
$$S = \{(x, y, z); 0 \leq z \leq f(x, y) \text{ e } (x, y) \in R\}.$$

Geometricamente,

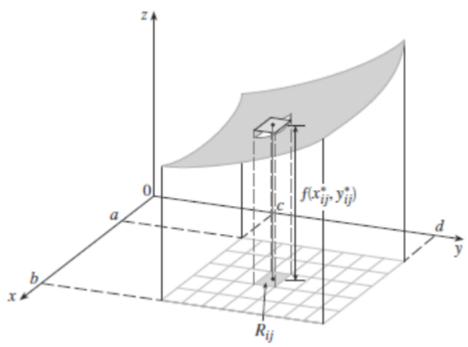


Objetivo: Determinar o volume do sóldio S.

1º passo: Dividir o retângulo R em retângulos menores $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$. A união desses retângulos nos fornece uma **partição** de R, sendo que cada retângulo R_{ij} tem área $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$.

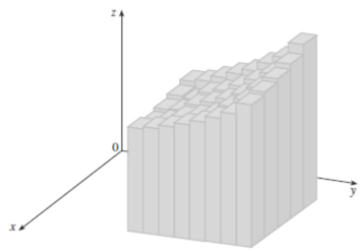


2º passo: Para cada retângulo R_{ij} escolha um ponto qualquer $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$, dito **ponto amostral**. E considere a caixa retangular de altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ e base R_{ij}.



Note que o volume de cada caixa é dado por $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_{ij}$, isto é, área da base multiplicado pela altura da caixa.
3º passo: Somar os volumes de todas as caixas obtidas. Assim, obtemos um valor aproximado do sólido S através da seguinte **soma de Riemann**:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_{ij}. \tag{1}$$



4º passo: Perceba que, quanto menores os lados dos retângulos R_{ij} melhor a aproximação dada em (1). Com isso, para obtermos o volume do sólido S precisamos aumentar a quantidade de retângulos R_{ij}, em outras palavras, precisamos aumentar os valores de m e n. Dessa forma, esperamos que

$$V = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_{ij}.$$

Através disso, obtemos a seguinte definição:

Definição 0.1. *A integral dupla de uma função f sobre um retângulo R é dada por*

$$\int\int_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A_{ij},$$

caso o limite exista.

Observação 1. *a) Perceba que as duas integrais devem "aparecer"já que estamos tomando o limite de duas somas de Riemann.*
b) Uma outra forma de representar a integral acima é através da notação:

$$\int\int_R f(x,y)dxdy.$$

Essa notação indica que estamos integrando em relação a variável x e depois em relação à variável y.
c) Dada uma função $f(x,y)$ contínua e positiva sobre um retângulo R, temos que o volume do sólido limitado inferiormente por R e superiormente pela superfície $z = f(x,y)$ e dado por

$$V = \int\int_R f(x,y)dA \text{ ou, equivalentemente, } V = \int\int_R f(x,y)dxdy.$$

Integrais Iteradas

Seja $f(x,y)$ uma função contínua num retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$.
Lembre-se de que, no estudo das derivadas parciais, derivar uma função $f(x,y)$ em relação à variável x sginifica derivar tal função considerando y como constante, e vice-versa. Procederemos de forma análoga no caso das integrais duplas (e triplas).
Dessa forma, a notação

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy,$$

nos diz que devemos integrar primeiro em relação a x e depois em relação à y. E,

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

significa que devemos integrar primeiro em relação a y e depois em relação à x. Essa integrais são ditas **Integrais Iteradas**.

Observação: Como mencionado acima, procederemos de maneira análoga as derivadas parciais, isto é, quando integrarmos em relação à variável x consideraremos o y como constante, e vice-versa.

Exemplo 0.1. *Determine as integrais a seguir:*

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dxdy$ *(b)* $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y dydx$*;*

(c) $\int_0^1 \int_1^0 (x+y+xy)dxdy$ *(d)* ***(Exercício)*** $\int_1^0 \int_0^1 (x+y+xy)dydx$

Algumas Propriedades:

Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ duas funções integráveis sobre uma região D e k uma constante qualquer. Então, são válidas as seguintes propriedades:

1.
$$\int\int_D [f(x,y)+g(x,y)]\, dA = \int\int_D f(x,y)dA + \int\int_D g(x,y)dA;$$

2.
$$\int\int_D kf(x,y)dA = k\int\int_D f(x,y)dA;$$

3. Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo ponto $(x,y) \in D$, então
$$\int\int_D f(x,y)dA \geq \int\int_D g(x,y)dA;$$

4. Se $D = D_1 \cup D_2$ e, salvo suas barreiras, D_1 e D_2 não se sobrepõem, então
$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_{D_1} f(x,y)dA + \int\int_{D_2} f(x,y)dA;$$

5. A área da região D é dada por
$$A = \int\int_D 1dA.$$

Exemplo 0.2. *Seja* $D = R_1 \cup R_2$*, em que* $R_1 = [-1,-2]\times[0,1]$ *e* $R_2 = [-e,0]\times[-2,0]$*. Utilize integrais duplas para calcular a área de* D*.*

Exemplo 0.3. *Sejam* m *e* M *números reais arbritários. Mostre que, se* $m \leq f(x,y) \leq M$ *para todo ponto* $(x,y) \in D$*, então*
$$mA(D) \leq \int\int_D f(x,y)dA \leq MA(D),$$
em que $A(D)$ *representa a área da região* D*.*

Exemplo 0.4. *Seja* D *o disco de raio 2 e centro* $(0,0)$*. Determine um intervalo que contenha o valor da integral* $\int\int_D e^{\operatorname{sen} x \cos y} dA$*.*