Universidade Federal de Ouro Preto
1ª Lista de GAAL/MTM730
Professor: Antônio Marcos da Silva

Observação: Muitos dos exercícios abaixos foram retirados das listas do professor Wenderson.

0. Reveja os exemplos feitos em sala de aula.

1. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes 6×6.

   (a) Se
   $$a_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \neq j \\ 3 & , \text{ se } i = j \end{cases} \quad e \; b_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \neq j \\ 2 & , \text{ se } i = j \end{cases},$$
   determine o elemento $[AB]_{34}$.

   (b) Se $A = I$ e
   $$b_{ij} = \begin{cases} i^2 + j^2 & , \text{ se } i \neq j \\ i^3 - j^3 & , \text{ se } i = j \end{cases},$$
   determine o elemento $[AB]_{46}$.

2. Considere as matrizes:
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \; e \; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Se possível, calcule:

   (a) AB e BA (Os produtos são iguais?)

   (b) CD e DC (Os produtos são iguais?)

   (c) $A + B$ e $A + C$.

   (d) AC, CA e $C^T A$.

   (e) $(2D^T - C)^T$.

   (f) $A^T + B$.

3. Sabe-se que cada item do tipo I custa $R\$1,00$, cada item do tipo II custa $R\$2,00$ e cada item do tipo III custa $R\$3,00$, além disso, sabe-se que a tabela dada descreve o número de itens de cada tipo que foram comprados durantes os quatro primeiros meses do ano.

	Tipo I	Tipo II	Tipo III
Jan	3	4	3
Fev	5	6	2
Mar	2	9	4
Abr	1	1	7

   Que informação esta representado pelo seguinte produto matricial?
   $$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Encontre x tal que $AB^t = 0$, em que
   $$A = \begin{pmatrix} x & 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for falsa, dê um contra-exemplo. Se verdadeira justifique demonstrando-a.

   (a) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então $AB = BA$. Resp.: F.

   (b) A matriz
   $$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix},$$
   satisfaz a equação matricial $X^2 = 2X$.

   (c) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem então $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Resp.: F.

   (d) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem então $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$. Resp.: F.

   (e) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem então $(A+B)^2 + (A-B)^2 = 2(A^2 + B^2)$.

   (f) Se A e B são matrizes que $AB = 0$ então $A = 0$ ou $B = 0$. Resp.: F.

   (g) Se A é uma matriz tal que $A^2 = 0$ então $A = 0$. Resp.: F.

   (h) Se A e B são matrizes simétricas então $A + B$ e kA são matrizes simétricas em que k é um número real qualquer. Resp.: V.

   (i) Se A e B são matrizes quadradas tais que $\det(AB) = 0$ então ou A é singular ou B é singular. Resp.: V.

   (j) Se A é uma matriz $n \times n$ então $\det(2A) = 2 \det A$. Resp.: F.

   (k) O sistema
   $$\begin{cases} mx + y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$$
   é possível e indeterminado desde que $m = 1$. Resp.: F.

   (l) Se A é uma matriz quadrada de ordem 7 e $\det(A - \lambda I_7) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3)^2(\lambda-4)^3$, então A é singular. Resp.: V.

6. Se possível, encontre as inversas das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Encontre todos os valores de a para que a matriz A seja invertível.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

8. Resolva o sistema $AX = B$ sabendo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

9. (a) Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é invertível se, e somente se, $ad - cb \neq 0$ e, neste caso, a inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(b) Mostre que se $ad - cb \neq 0$, então o sistema linear

$$\begin{cases} ax + by = z \\ cx + dy = t, \end{cases}$$

tem como solução

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} z & b \\ t & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \text{ e } y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & z \\ c & t \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}.$$

Esta é a conhecida **Regra de Crammer**.

10. Mostre que se A e P são matrizes 2×2 e P é invertível, então $\det(P^{-1}AP) = \det A$.

11. Mostre que se A é uma matriz não singular tal que $A^2 = A$, então $\det A = 1$.

12. Artur, Bernardo e Cláudio saíram para tomar chope, de bar em bar, tanto no sábado quanto no domingo. As matrizes a seguir resumem quantos chopes cada um consumiu e como a despesa foi dividida

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

S refere-se às despesas de sábado e D às de domingo. Cada elemento a_{ij} nos dá o número de chopes que i pagou para j, sendo Artur o número 1, Bernardo o número 2 e Cláudio o número 3.

(a) Quem bebeu mais chopes no fim de semana?

(b) Quantos chopes Cláudio ficou devendo para Artur?

Resp.: a) Cláudio b) 2.

13. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontre uma expressão para A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Resp.: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a matriz $T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Mostre que:

(a) $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.
Sugestão: Lembre-se de que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ e $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

(b) $T_{-\alpha} = T_\alpha^t$.
Sugestão: Lembre-se de que seno é uma função ímpar e cosseno é uma função par.

15. Dizemos que uma matriz A anula um polinômio $p(x)$ quando $p(A) = 0$. A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ anula o polinômio $p(x) = x^2 - 6x + 5$? E a matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?
Sugestão: Calcule $p(A) = A^2 - 6A + 5I$ e $p(B) = B^2 - 6B + 5I$.

16. Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & a \\ 2 & 2a-2 & -a-2 & 3a-1 \\ 3 & a+2 & -3 & 2a+1 \end{pmatrix}.$$

Determine o conjunto solução do sistema $AX = B$, em que $B = (4\ 3\ 1\ 6)^t$, para todos os valores de a.
Resp.: Se $a \neq 1$ e $a \neq 5$ o sistema tem solução única. Se $a = 1$, o sistema tem infinitas soluções. Se $a = 5$, o sistema não tem solução.

17. Se $\det(A) = -3$, calcule: $\det(A^2)$, $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$ e $\det(A^t)$.

18. Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $\det(A) = -2$ e $\det(B) = 3$, calcule $\det(A^t B^{-1})$.

19. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} -13 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{F} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Res.: $\det A = -61$; $\det B = 4$; $\det C = 0$; $\det D = 39$, $\det E = 6$ e $\det F = 2$.

20. Das matrizes do exercício anterior, qual(is) pertence(m) ao conjunto

$$\mathbb{W} = \{M \in \mathbb{M}_5(\mathbb{R}); \det M \neq 0\}\,?$$

Resp.: Apenas a matriz F.

21. Assinale como verdadeiro ou falso. Justifique sua resposta.

( ) Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Se X e Y são soluções do sistema homogêneo, $AX = 0$, então $X + Y$ também o é. Resp.: V.

( ) Se A e B são matrizes que comutam com a matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, então $AB = BA$. Resp.: V.

( ) Se X_1 é uma solução do sistema $AX = B$ e Y_1 é solução do sistema homogêneo $AX = 0$, então $X_1 + Y_1$ é solução de $AX = B$. Resp.: V.

( ) Existe uma matriz A de ordem n tal que $\det(AA^T) = -1$. Resp.: F.

( ) Se A é invertível, então $BA^{-1} + CA^{-1}$ é solução do sistema $AX = B + C$. Resp.: F.

22. Para matrizes quadradas $A = (a_{ij})_{n\times n}$, definimos o **traço** de A como sendo a soma dos elementos da diagonal (principal) de A, ou seja, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Mostre que:

(a) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

(b) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$.

(c) $tr(A) = tr(A^t)$.

(d) $tr(AB) = tr(BA)$.

23. Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é $R\$2,00$, $R\$3,00$ e $R\$5,00$, respectivamente. Com a venda de toda produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2 kg de B, essa indústria arrecadou $R\$2500,00$. Determine quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos. *Sugestão:* Transforme as informações acima em um sistema matricial da forma $AX = B$ em que a matriz A terá como entrada os valores referentes as gramas de A e de B por kg e também o preço por kg, X terá como entrada os valores que você deve encontrar, e B será formada pelas gramas de A e de B utilizados e a arrecadação.
Resp.: 700 kg de X; 200 kg de Y e 100 kg de Z.

24. Um fazendeiro está planejando a estratégia de plantio do próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, sabe-se que as culturas de feijão, arroz e milho, serão mais rentáveis na próxima safra. O custo do plantio de feijão, arroz e milho por hectares é respectivamente R$10,00, R$12,00 e R$15,00. O fazendeiro dispõe de R$1000 para investir. A área cultivável da fazenda é de 80 hectares. Que área da fazenda deve-se utilizar para o cultivo de cada um dos produtos?

25. A equação $x^2 = 1$ tem duas soluções reais: $x = 1$ e $x = -1$. Encontre todas as matrizes 2×2 que satisfazem a equação $X^2 = I_2$.

26. Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E.
Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que:

    (a) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.
    (b) O alimento II tem 9 unidade de vitamina A, 1 unidades de vitamina B, 0 unidade de vitamina C, 1 unidades de vitamina D e 1 unidades de vitamina E.
    (c) O alimento III tem 2 unidade de vitamina A, 2 unidades de vitamina B, 5 unidade de vitamina C, 1 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.
    (d) O alimento IV tem 1 unidade de vitamina A, 1 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 13 unidades de vitamina E.
    (e) O alimento V tem 1 unidade de vitamina A, 1 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 9 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

    Quantas gramas dos alimentos I, II, III, IV e V, devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

27. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

    (a) Use a definição de determinante por cofator para calcular $\det A$.
    (b) Calcule $\det\left(\frac{2}{\sqrt{2}}(A^{-1})^t D\right)$, em que

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 13 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

28. Considere a matriz dada por $A = (a_{ij})_{3\times 3} = \begin{cases} 0, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i = j \\ a, & \text{se } i > j \end{cases}$. em que a é um número real qualquer.

    (a) Determine A e A^t.
    (b) A é invertível? Se não, justifique. Se sim, encontre A^{-1}.

29. Quais das seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&0&1&0&-4\\0&0&0&1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&0&0&-4\\0&0&1&0&5\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}\text{ e }C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Res.: As matrizes A e C estão na forma escalonada reduzida.

30. Resolva os seguintes sistemas:

$$\begin{cases}x+y+2z=8\\-x-2y+3z=1,\\3x-7y+4z=10\end{cases}\quad\begin{cases}2x+2y+2z=0\\-2x+5y+2z=1\\8x+y+4z=-1\end{cases}\quad e\quad\begin{cases}-2y+3z=1\\3x+6y-3z=-2.\\6x+6y+3z=5\end{cases}$$

Res.: a) $X=(3,1,2)$ b) $X=(\frac{-1}{7}-\frac{3}{7}\alpha,\frac{1}{7}-\frac{4}{7}\alpha,\alpha)$ c) não tem solução.

31. Em cada item suponha que a matriz completa de um sistema foi transformada usando operações elementares na matriz escalonada reduzida dada. Resolva o sistema correspondente.

a) $\begin{pmatrix}1&0&0&-7&8\\0&1&0&3&2\\0&0&1&1&-5\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1&0&0&0&6\\0&1&0&0&3\\0&0&1&1&2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1&7&0&0&-8&-3\\0&0&1&0&6&5\\0&0&0&1&3&9\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

32. Seja $A=\begin{pmatrix}1&0&5\\1&1&1\\0&1&-4\end{pmatrix}$. Encontre a solução geral dos sistemas $(A+4I_3)\,X=0$ e $(A-2I_3)\,X=0$.

Resp.: a) $X=(-\alpha\ ,\ 0\ ,\ \alpha\ )$ e $X=(5\alpha\ ,\ 6\alpha\ ,\alpha\ )$ $\alpha\in\mathbb{R}$.

33. Considere o subconjunto W de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$W=\left\{\begin{pmatrix}2a&a+2b\\0&a-b\end{pmatrix};a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

Quais das matrizes a seguir pertencem a W?

(a) $\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

Resp.: (a) pertence; (b) não pertence; (c) pertence.

34. Encontre todos os valores de a para os quais o sistema abaixo não tenha solução, tenha solução única e tenha infinitas soluções.

$$\begin{cases}x+y+z=2\\2x+3y+2z=5\\2x+3y+(a^2-1)z=a+1\end{cases}.$$

Resp.: Não existem valores reais para que o sistema tenha infinitas soluções. Se $a=\pm\sqrt{3}$, o sistema não tem solução. Se $a\neq\pm\sqrt{3}$ o sistema tem solução única.

35. Ache x,y,z e w tais que

$$\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Mostre que não existem x, y, z e w tais que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Existem x, y, z e w tais que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

36. Seja $\begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $A = A^t$, determine x.

37. Se $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, ache B tal que $B^2 = A$.

38. Uma matriz $A_{3\times 3}$ tem a propriedade $(A^2)_{ij} = i\delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Calcule $\det\left(\frac{A^6}{2\sqrt{10}}\right)$.
Resp.: $\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^3$

39. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    (a) Determine todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais $Av = \lambda v$ em que $v \neq 0$. Resp.: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$.

    (b) Para cada λ encontrado no item anterior resolva, usando o método de Gauss-Jordan, o sistema
    $$(A - \lambda I_3)v = 0.$$

40. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    (a) Determine todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais $Av = \lambda v$ em que $v \neq 0$.

    (b) Para cada λ encontrado no item anterior resolva, usando o método de Gauss-Jordan, o sistema
    $$(A - \lambda I_3)v = 0.$$

41. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

    (a) Encontre, se existir, A^{-1}.

    (b) Se $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, com $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, quantas soluções tem o sistema $AX = B$? Justifique.