Universidade Federal de Ouro Preto

1^a Lista de Exercícios - Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação

Prof. Antônio Marcos da Silva

1. Reduza à forma $a + bi$ os números complexos: $\frac{1-3i}{i}$ e $\frac{(1-3i)^9}{1-i}$.

2. Determine o módulo e o argumento dos números complexos abaixo. Represente-os no plano.

   (a) $z = 1$.

   (b) $z = 1 + i$

   (c) $z = i$

   (d) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

   (e) $z = -2i$.

   (f) $z = (2 + i)(3 + i)$.

   (g) $z = \frac{2}{1-i}$.

3. Calcule $(1 - i)^2$ e use esse resultado para determinar $(1 - i)^{96} + (1 - i)^{97}$.

4. Determine todos os valores de a para os quais
$$\frac{a + i}{1 + ai}$$
seja um número real. Resp.: $a = 1$ e $a = -1$.

5. Resolva a equação $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$. Resp.: $z = -1 - i$.

6. Determine todos os números complexos $z = a + bi$ tais que $z^2 = \bar{z}$. Resp.: $0, 1, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

7. Determine a representação polar do número complexo $z = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Isto é, escreva-o na forma $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

8. Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $\omega = \bar{z} + 3i$. Calcule $\bar{\omega}$ e conclua que $\bar{\omega} = z - 3i$.

9. Determine o argumento de $z = (\sqrt{3} - i)^6$. Resp.: $\arg(z) = \pi$

10. Determine todos os valores de $z = i^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Resp.: $z \in \{1, -1, i, -i\}$.

11. Determine todos os valores de z tais que $z = \sqrt[3]{1}$. Res.: $1, -1/2 + \sqrt{3}i/2, -1/2 - \sqrt{3}i/2$.

12. Esboce no plano complexo o conjunto dos pontos z tais que $|z + i| \leq 2$. Faça o mesmo para o conjunto dos números z tais que $\operatorname{Re}(z) > 0$.

13. No contexto da análise de circuitos em corrente alternada, quando é preciso operar com quantidades senoidais em determinada frequência como
$$I(t) = i_m sen(\omega t + \theta),$$
comumente usamos a álgebra dos números complexos e a notação
$$I(t) = i_{rms} \llcorner +\theta$$
onde $i_{rms} = i_m/\sqrt{2}$. Este raio vetor, tendo uma magnitude (ou módulo) i_{rms} constante com a extremidade inicial fixada à origem é chamado *Fasor* quando aplicado a circuitos elétricos. Converta as expressões abaixo do domínio do tempo para o domínio dos fasores.

    (a) $\sqrt{2}\sin(\omega t)$; Resp.: $1\llcorner 0^o$

    (b) $73,539\sin(\omega t + 45^o)$; Resp.: Aproximadamente $52\llcorner 45^o$.

14. Seja $f(z) = 2iz + 6\bar{z}$. Determine $f(\frac{1}{2} + 4i)$ e $f(\pi)$. Resp.: $f(\frac{1}{2} + 4i) = -5 - 23i$ e $f(\pi) = (2i + 6)\pi$.

15. Seja $f(x+iy) = \frac{1}{x+iy}$, em que $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$. Determine a parte real e imaginária de f. Resp.: $\text{Re}(f) = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $\text{Im}(f) = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

16. A função

$$f(x,y) = \begin{cases} (0,0), & \text{se } (x,y) \neq (0,0). \\ (1,0), & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua no ponto $(0,0)$? Resp.: Não.