Universidade Federal de Ouro Preto
2ª Lista de GAAL/MTM730
Professor: Antônio Marcos da Silva

Observação: Muitos dos exercícios abaixo foram retirados das listas do professor Wenderson.

1. Determine o ponto C tal que $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$, sendo $A = (0, -2)$ e $B = (1, 0)$.

2. Considere uma reta r no plano de equação $y = 2x + 1$. Determine um vetor paralelo a r.

3. Determine o vetor $\vec{x}$ tal que $3\vec{x} - 2\vec{v} = 15(\vec{x} - \vec{u})$. **Resp.:** $\vec{x} = \frac{5}{4}\vec{u} - \frac{1}{6}\vec{v}$.

4. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das bases. Dica: Lembre-se de que se P é ponto médio do segmento AC então as coordenadas de P são dadas pela média aritmética das coordenadas de A e C.

5. Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.

6. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -5)$ e $\vec{v} = (1, 2)$, mostre que o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é uma base do plano. Exprima $\vec{r} = (7, -52)$ nessa base. **Resp.:** $\vec{r} = 6\vec{u} - 11\vec{v}$.

7. Verifique se os vetores $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{c} = 3\vec{k}$ são LI. Em casos afirmativo, escreva o vetor $\vec{d} = (4, -3, -1)$ na base formada por tais vetores. **Resp.:** $\vec{d} = 1/2\vec{a} + 3\vec{b} - 1/3\vec{c}$.

8. Dados os pontos $A = (5, -7, 0)$ e $B = (2, -4, 6)$, determine as coordenadas dos pontos M e N do segmentoo AB tais que $AM = MN = NB$. **Resp.:** $M = (4, -6, 2)$ e $N = (3, -5, 4)$.

9. Determine o perímetro do triângulo de vértices $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 5, 0)$ e $C = (0, 0, 8)$. **Resp.:** $\sqrt{34} + \sqrt{89} + \sqrt{73}$.

10. (a) Determine a relação entre m e n para que sejam LD os vetores $\vec{r} = (m, 5)$ e $\vec{s} = (2, n)$. (b) Faça o mesmo para os vetores $\vec{r} = (m, 0, 5)$, $\vec{s} = (2, -1, n)$ e $\vec{t} = (1, 1, 0)$. **Resp.:** a) $mn = 10$.

11. Verifique se existe x tal que os vetores $\vec{u} = (x, 2, 4)$ e $\vec{v} = (x, -2, -3)$ sejam ortogonais. **Resp.:** ± 4

12. Represente geometricamente, em $\mathbb{R}^3$, os pontos: $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, 0, 4)$ e $C = (5, 1, 3)$.

13. Mostre que $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$.

14. Determine $\|2\vec{a} + 4\vec{b}\|^2$, sabendo-se que $\|\vec{a}\| = 1$ e $\|\vec{b}\| = 2$ e que o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é 120°. **Resp.:** 52.

15. Decomponha o vetor $\vec{s}$ como soma de dois outros vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, com $\vec{a}$ paralelo a $\vec{r}$ e $\vec{b}$ perpendicular a $\vec{r}$.
    (a) $\vec{s} = (3, 2, 1)$ e $\vec{r} = (1, 1, 1)$. **Resp.:** $\vec{a} = (2, 2, 2)$ e $\vec{b} = (1, 0, -1)$
    (b) $\vec{s} = (1, 1, 2)$ e $\vec{r} = (-1, 1, 3)$. **Resp.:** $\vec{a} = (-\frac{11}{6}, \frac{11}{6}, \frac{11}{2})$ e $\vec{b} = (\frac{-34}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{-7}{2})$

16. Determine o ângulo entre os vetores $4\vec{i} - 3\vec{j}$ e $-\vec{i} + 2\vec{k}$. **Resp.:** $\theta = \text{arcccos}\left(\frac{-4\sqrt{5}}{25}\right)$.

17. Determine a condição que p deve satisfazer para que os vetores $\vec{a} = (p, -7, 5)$ e $\vec{b} = (p, p, 2)$ formem ângulos obtusos. **Resp.:** $\{p \in \mathbb{R}; 2 < p < 5\}$.

18. Verifique que os vetores $\vec{u} = \sqrt{3}/3(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$, $\vec{v} = \sqrt{2}/2(\vec{j} + \vec{k})$ e $\vec{w} = \sqrt{6}/6(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ formam uma base ortonormal.

19. A medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$. Se $\|\vec{u}\| = 1$ e $\|\vec{v}\| = 7$, determine $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ e $\|a\vec{u} \times b\vec{v}\|$, em que a e b são números reais. **Resp.:** $\frac{7}{2}$; $\frac{7|ab|}{2}$.

20. Determine um vetor unitário perpendicular aos vetores $(1, -3, 1)$ e $(-3, 3, 3)$. **Resp.:** $\frac{\sqrt{6}}{6}(2, 1, 1)$.

21. Verifique se os ternos abaixo são coplanares. Em caso contrário, determine o volume do paralelepípedo e do tetraedro que possuem tais ternos como arestas.

    (a) $\vec{a} = (3, 2, 0)$, $\vec{b} = (0, 2, 2)$ e $\vec{c} = (0, 5, 0)$. **Resp.:** $V_p = 30$, $V_T = 5$.

(b) $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (3, 0, 0)$ e $\vec{c} = (0, 0, \sqrt{2})$. **Resp.:** Coplanares

(c) $\vec{a} = (-6, 0, 0)$, $\vec{b} = (3, 2, 0)$ e $\vec{c} = (0, 3, 1)$. **Resp.:** $V_p = 12$, $V_T = 2$.

22. Verifique que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (m\vec{u} + n\vec{v}) = 0$.

23. Determine a equação dos planos que contém os pontos:

    (a) $A = (1, 2, -3)$, $B = (-1, 0, 4)$ e $C = (2, 3, 5)$.

    (b) $A = (-1, 7, 3)$, $B = (10, 1, 0)$ e $C = (-2, -1, 1)$.

    (c) $A = (-1, 0, 3)$, $B = (1, 2, -5)$ e $C = (2, 0, 1)$.

24. Determine um vetor paralelo à reta

$$s : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Resp.: (1, -1, -3)

25. Determine o plano que contém a reta $s = \{\frac{x-3}{2}, \frac{y-1}{3}, z\}$ e o ponto $A = (1, 1, 1)$. **Resp.:** $3x - 4y + 6z - 5 = 0$.

26. Determine o plano π que passar por $M = (1, 2, -3)$ e é paralelo às retas

$$r : \begin{cases} x + 3y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{e } s : \begin{cases} 3x - y + 2 = 0. \\ x + 2y - 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

Resp.: $\pi : x - 5y + 6z + 27 = 0$.

27. Determine a altura do tetraedro $ABCD$ relatica ao vértice C, sendo $A(1, -2, 3)$, $B(2, 1, 5)$, $C(0, 5, 2)$ e $D(1, 3, -2)$. **Resp.:** $11\sqrt{3}/9$

28. Dados os planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$, determine o plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é ortogonal ao vetor $(-1, 1, -1)$. **Resp.:** $x - y + z + 1 = 0$

29. Dada a reta $r : X = (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ e os pontos $A(1, 1, 1)$ e $B(0, 0, 1)$, determine os pontos de r equidistantes de A e B. **Resp.:** (1, 0, 0).

30. Determine as equações dos planos em $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $(2, 2, 2)$ que distam $\sqrt{3}$ de $(1, 1, 1)$. **Resp.:** $2x + 2y + 2z = 0$ e $2x + 2y + 2z = 12$

31. Seja π_1 o plano que passa pelos pontos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 0, 1)$ e $C(1, 1, 0)$ e π_2 o plano que passa pelos pontos $P(0, 0, 1)$, $Q(0, 0, 0)$ e é paralelo a $\vec{i} + \vec{j}$. Determine o ângulo entre π_1 e π_2. **Resp.:** 45°

32. Seja $\vec{u} = (x, y, z)$ um vetor tal que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, com $z > 0$. Faça o que se pede:

    (a) determine $\vec{u}$ sabendo que a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v} = (1, -1, 0)$ é de 45° e que $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w} = (1, 1, 0)$;

    (b) determine k de modo que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{t} = (k, 0, k + 1)$, sejam linearmente dependentes.

    (c) se $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{m}{\sqrt{2}}, 0)$ determine m para que $\left(\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \cdot \vec{a}\right) - \|2\vec{w} \times \vec{v}\| = 2$.

Resp.: (a) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$; (b) k = 0; (c) m = 11.

33. Sejam $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Encontre um vetor $\vec{x}$ tal que $\|\vec{x}\| = \sqrt{2}$ e $\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$. **Resp.:** (0, 1, 1)

34. Determine m de modo que o volume do paralelepipedo de arestas $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$, seja de 52 unidades de volume, em que $P(5, 4, 5)$, $Q(4, 10, 6)$, $R(1, m, 7)$ e $S(2, 6, 9)$.

35. Faça o que se pede:

(a) Sabendo que o vetor $\vec{v} = (2, 1, -1)$ forma um ângulo de 60° com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos $A = (3, 1, -2)$ e $B = (4, 0, m)$, calcule m. **Resp.:** $m = -4$

(b) Escreva $\vec{v}$ como soma de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sendo que $\vec{a}$ é paralelo ao eixo Oy e $\vec{b}$ forma um ângulo reto com o vetor $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

(c) O conjunto $V = \{\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{b}\}$, em que $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ foram dados nos itens anteriores, é uma base para $\mathbb{R}^3$?

36. Considere o triângulo ABC, sendo $A(3, -3, 3)$, $B(2, -1, 2)$ e $C(1, 0, 2)$.

(a) Determine os ângulos internos desse triângulo.

(b) Cálcule sua área.

37. (a) Determine um vetor $\vec{w}$ que é simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -6, 3)$ e $\vec{v} = (4, 3, 1)$. **Resp.:** $w = (-15, 10, 30)$

(b) Os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, dados no item anterior, são coplanares? **Resp.:** Não.

38. Faça o que se pede:

(a) Considere os vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ e $\vec{w} = (1, 0, 3)$. Decomponha o vetor $\vec{w}$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, sabendo que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1\}$ é um conjunto linearmente dependente e que $\vec{w}_2$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

(b) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$?

(c) Exprima $\vec{w}_1$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(d) Determine um escalar k de modo que os vetores $\vec{t} = (-1, 0, k)$ e $\vec{u}$ formem um ângulo de 60°.

39. Sejam $A = (2, 1, 3)$, $B = (k + 2, 3, 5)$ e $C = (0, 4, 1)$. Determine:

(a) k de modo que os pontos A, B e C, formem um triângulo retângulo em A.

(b) a área do paralelogramo de lados $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$, considerando o valor de k encontrado no item anterior.

40. Determine x para que o volume do tetraedro de vértices $A(x, 2, 1)$, $B(7, 4, 3)$, $C(4, 6, 2)$ e $D(x + 2, x + 2, 3)$ seja igual a 4 unidades de volume.

41. (a) Encontre a equação do plano π que passa pelos pontos $A = (0, 0, -1)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (1, 0, 1)$.

(b) Determine a distância da origem ao plano π.

42. Encontre o ângulo entre o plano $\pi : 2x - y + z$ e o plano que passa pelo ponto $P(1, 2, 3)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

43. Seja r uma reta determinada pelos pontos $A(3, 1, -2)$ e $B(4, 0, m)$. Considere a reta

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t, \\ z = 3 - t \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$. Determine m de modo que o ângulo entre r e s seja de 60°.

44. (a) Dados $A(0, 2, 1)$ e

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t - 2 \end{cases}$$

Ache o(s) ponto(s) de r que dista(m) $\sqrt{3}$ de A. **Resp.:** Apenas o ponto $P = (1, 1, 0)$.

(b) Determine a equação de um plano π que contenha o(s) ponto(s) encontrado(s) em (a) e é perpendicular ao eixo x. **Resp.:** $\pi : x - 1 = 0$.

45. (a) Determine a de modo que os plano $\pi_1 : x + ay + z = 20$ e $\pi_2 : 2x + y + z = 3$ formem um ângulo θ tal que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

    (b) Encontre a distância entre o plano π_2 e o ponto $P(0, 1, 1)$.

46. Seja ABC um triângulo de vértices $A(-3, 1, 4)$, $B(-4, -1, 0)$ e $C(-4, 3, 5)$. Calcule a medida da altura relativa ao lado BC. **Sugestão:** Calcule a distância entre a reta que contém BC e o ponto A. **Resp.:** $\frac{\sqrt{77}}{\sqrt{21}}$

47. Ache os pontos do plano $\pi : x = y$ equidistantes dos pontos $A(1, 1, 0)$ e $B(0, 1, 1)$. **Resp.:** Todo ponto do tipo (x, x, x).

48. (a) Verifique que os planos $\pi : x - y = 0$ e $\beta : y - z = 1$ se interceptam segundo uma reta r.

    (b) Ache a equação do plano que passa pelo ponto $A(1, 0, -1)$ e é perpendicular a reta r.

49. Determine o ângulo entre o plano $x = 0$ e o plano que contém os pontos $A(5, 0, -2)$, $B(8, 2, -3)$ e $C(1, 2, 4)$.

50. Considere o ponto $P = (4, 1, -1)$ e a reta $r : (x, y, z) = (2 + t, 4 - t, 1 + 2t)$.

    (a) $P \in r$? Justifique. **Resp.:** Não, pois não existe t tal que $(2 + t, 4 - t, 1 + 2t) = (4, 1, -1)$

    (b) Obtenha a equação geral do plano π que contém P e r. **Resp.:** $8x + 6y - z - 38 = 0$

    (c) Existe $m \in \mathbb{R}$ tal que a reta $s : (x, y, z) = (mt, 0, t)$ forme com a reta r um ângulo de 45º? Justifique.

51. Suponha que $\vec{v}$ seja um vetor com as seguintes propriedades:

    - $\vec{v}$, $\vec{u} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 2)$ são coplanares;
    - $\vec{v}$ é paralelo ao plano $\pi : x + y - z + 1 = 0$;
    - $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$; e,
    - o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{t} = (1, 1, 0)$ é maior que $\frac{\pi}{2}$.

    Determine A sendo que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ com $B = (1, 0, -3)$. **Resp.:** $A = (2, 0, -2)$

52. Obtenha os vértices B e C do triângulo equilátero ABC, sendo $A = (1, 1, 0)$ e sabendo que o lado BC está contido na reta r de equação vetorial $X = (0, t, -t)$.
    Sugestão: Note que, como ABC é um triângulo equilátero, o ângulo entre a reta r e a reta que passa por A e B é de 60º. **Resp.:** (0, 0, 0) e (0, 1, -1).

53. Os vetores $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$, $\vec{v} = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{k}$ formam uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^3$? Justifique. **Resp.:** Sim, pois formam um conjunto LI, são ortogonais entre si e unitários.

54. Faça o que se pede:

    (a) Determine a equação geral do plano π paralelo aos vetores $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, 2)$, e que passa pelo ponto $A = (0, 1, 1)$. **Resp.:** $-x - y + z = 0$.

    (b) Verifique que o plano π (encontrado no item anterior) é ortogonal a reta

    $$r : \begin{cases} x - 2y - z - 7 = 0 \\ x + z + 5 = 0 \end{cases}$$

    (c) Encontre os pontos de r que estão a uma distância igual a $\sqrt{3}$ do plano π. **Resp.:** $P_1 = (1, 0, 4)$ e $P_2 = (3, 2, 2)$.

55. Considere os pontos $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 2)$ e $C(\sqrt{3}, 0, 1)$.

    (a) Verifique que o triângulo ABC é equilátero. **Resp.:** Basta mostrar que $\| \overrightarrow{AB} \| = \| \overrightarrow{AC} \| = \| \overrightarrow{BC} \|$

    (b) Encontre a equação da reta bissetriz do ângulo interno $B\hat{A}C$.
    Sugestão para o item (b): Lembre-se de que, em um triângulo equilátero, as bissetrizes coincidem com as medianas. **Resp.:** $X = t(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2})$.