Universidade Federal de Ouro Preto

2^a Lista de Exercícios - Matemática Aplicada à Engenharia de Controle e Automação

Prof. Antônio Marcos da Silva

1. Seja $f(z) = az + b$, com $a, b \in \mathbb{C}$. Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, calcule:
$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$
Use o resultado obtido para concluir que $f'(z_0) = a$ para todo $z_0 \in \mathbb{C}$.

2. Calcule $\ln(1+i)$. Resp.: $\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$.

3. Calcule e^z quando $z = i\frac{\pi}{4}$. Faça o mesmo para $\frac{2+i\pi}{4}$.

4. Verifique se as condições de Cauchy-Riemann se cumprem para as seguintes funções:
   (a) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$. Resp.: Sim.
   (b) $f(z) = z^2$. Resp.: Sim.
   (c) $f(z) = \bar{z}$. Resp.: Não.
   (d) $f(z) = az + b$, onde $a, b \in \mathbb{C}$. Resp.: Sim.
   (e) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$.
   (f) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \sin y)$.
   (g) $f(z) = e^{y}(\cos x + i \sin x)$.
   (h) $f(z) = Im(z^2)$. Resp.: Não.

5. Seja $f(x + iy) = e^x[\cos(ky) + i\sin(ky))]$. Determine k de forma que f seja analítica. Resp.: $k = 1$.

6. Calcule a derivada das seguintes funções e determine seus pontos singulares:
   (a) $f(z) = \frac{3z-1}{(z-1)(z+4)}$.
   (b) $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
   (c) $f(z) = \frac{i}{(3z-1)^2}$.
   (d) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$.
   (e) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.
   (f) $f(z) = \sec(z)$.

   Resp.: Singularidades: (a) 1, -4; (b) $-i$; (c) 1/3; (d) $-i, i$; (e) $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$; (f) $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

7. Calcule $\int_\gamma f(z)dz$:
   (a) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$; Resp.: $2\pi i$.
   (b) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$; Resp.: $\frac{2\pi i}{\sqrt{2}}$.
   (c) $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$; Resp.: 0.
   (d) $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}$ e γ é o quadrado de vértices $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (no sentido anti-horário). Resp.: $-2\pi i$.
   (e) $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}$ e $\gamma(t) = e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$ e $n \in \mathbb{N}$; Resp.: 0 se $n-1$ for par; $\frac{4\pi i}{(n-1)!}$ se $n-1$ for ímpar.
   (f) $f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$ e $\gamma(t) = z \in \mathbb{C}; |z| = 8$; Resp.: $10\pi i$.
   (g) $f(z) = \frac{\ln z}{z}$ e $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$; Resp.: 0.
   (h) $f(z) = \frac{1}{(z-i)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, e $\gamma(t) = i + e^{it}$ com $t \in [0, \pi]$; Resp.: 0.

8. Determine os raios de convergências das séries:
   (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} n2^n z^n$. Resp.: 1/2.

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n$. Resp.: 0.

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^n}$. Resp.: infinito.

9. Determine a série de Laurent de $e^{\frac{1}{z}}$ em torno de $z_0 = 0$. Resp.: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!z^n}$, com $z \neq 0$.

10. Seja $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ definida em $\mathbb{C} - \{1, 2\}$. Determine a série de Laurent em $A_{1,2} = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\}$. Resp.: $-\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{z^n}{2^{n+1}}\right)$.

11. Determine as singularidades das funções abaixo, classifique-as e determine seus resíduos:

(a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Resp.: $z = 0$. Removível. **Res**(f,0)=0.

(b) $f(z) = z^3 e^{i/z}$. Resp.: $z = 0$. Essencial. **Res**(f,0)=1/24.

(c) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$. Resp.: $z = 1$. Polo duplo. **Res**(f,1)=0.