Universidade Federal de Ouro Preto
3ª Lista de GAAL/MTM730
Professor: Antônio Marcos da Silva

1. Sejam U e V dois espaços vetoriais reais. Considere o seguinte conjunto:

$$U \times V = \{(u, v); u \in U ev \in V\}$$

Defina em $U \times V$ as seguintes operações:

$$\text{adição:}(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2);$$
$$\text{multiplicação por escalar:}a(u, v) = (au, av).$$

Mostre que $(U \times V; +; \cdot; \mathbb{R})$ é um espaço vetorial real.

2. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e $C(I) = \{f : I \to \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$. Defina em $C(I)$ as seguintes operações:

$$\text{adição: } (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I;$$
$$\text{multiplicação por escalar: } (af)(x) = af(x), \forall x \in I.$$

Mostre que $(C(I); +; \cdot; \mathbb{R})$ é um espaço vetorial real.

3. Verifique se são espaços vetoriais os seguintes conjuntos:

   (a) O $\mathbb{R}^2$ com a adição usual e com a multiplicação por escalar $a \cdot (x, y) = (ax, y)$. **Resp.:** Não é E. V.

   (b) O $\mathbb{R}^2$ com a multiplicação por escalar usual e com a adição $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+2x_2, y_1+2y_2)$. **Resp.:** Não é E. V.

   (c) O $\mathbb{R}^2$ com a multiplicação por escalar usual e com a adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$. **Resp.:** Não é E. V.

   (d) O conjunto $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ com as operações $x + y = xy$ e $a \cdot x = x^a$. Nesse caso, qual é o vetor nulo? **Resp.:** É E. V. O vetor nulo é $v = 1$.

4. Se U e V são subespaços de um espaço W, mostre que

$$U \cap V = \{w; w \in U \text{ e } w \in V\} \text{ e } U + V = \{w = u + v; u \in U \text{ e } v \in V\},$$

são subespaços vetoriais.

5. Considere o subespaço W de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$? **Resp.:** Sim. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in W$? **Resp.:** Não.

6. Verifique se os subconjuntos W são subespaços dos espaços vetoriais V dados.

   (a) $W = \{(x, y); x \geq 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$. **Resp.:** Não.

   (b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}; c = a + b \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$. **Resp.:** É subespaço.

   (c) $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A = A^t\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$. **Resp.:** É subespaço.

   (d) $W = \{(a, 2a, 3a); a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$; **Resp.:** É subespaço.

   (e) W é o subconjunto de todas as funções f tais que $f(0) = 1$ no espaço vetorial V de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, ou seja,
   $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{é uma função}\}$ e $W = \{f \in V; f(0) = 1\}$. **Resp.:** Não é.

(f) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$. **Resp.:** Não é.

7. No espaço das matrizes reais de ordem 3×2, verifique se exitem α e β reais tais que $A = \alpha B + \beta C$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. No espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 3 sejam

$$f(t) = t^3 - 1,\ g(t) = t^2 + t - 1 \text{ e } h(t) = t + 2.$$

   (a) Existe $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $f(t) + kg(t) = h(t)$? **Resp.:** Não.

   (b) Existem $k, l \in \mathbb{R}$ tais que $f(t) = kg(t) + lh(t)$? **Resp.:** Não.

9. Considere no espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2 os vetores $p(t) = t^2 - 2t + 1$, $q(t) = t + 2$ e $h(t) = 2t^2 - t$. Escreva $f(t) = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p, q e h.

10. Verifique se os conjuntos de vetores abaixo são L.D. ou L.I.:
(a) Em $\mathbb{R}^2$ o conjunto $S = \{(1, 2)\}$. **Resp.:** L.I.

(b) Em $\mathbb{R}^2$ o conjunto $S = \{(1, 2), (-2, 4)\}$. **Resp.:** L.I.

(c) Em $\mathbb{R}^3$ o conjunto $S = \{(2, 3, 1), (0, 0, 0), (1, 5, 2)\}$. **Resp.:** L.D.

(d) Em $\mathbb{R}^3$ o conjunto $S = \{(0, 0, 1), (1, 2, 0), (-7, 5, 2), (1, 4, 3)\}$. **Resp.:** L.D.

(e) No espaço das matrizes reais de ordem 2×3 o conjunto $S = \{A, B, C\}$, em que
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, e $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Determine o valor de k para que os vetores $(-1, 0, 2)$, $(1, 1, 1)$ e $(k, -2, 0)$, sejam L.I.. **Resp.:** $k \neq -3$.

12. Verifique que o conjunto $\{(1, -1), (2, 1), (-1, 0)\}$ é L.D.. Escreva cada elemento desse conjunto como combinação linear dos outros dois.

13. Verifique se os vetores $v_1 = (1, 3, -5)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (6, 1, -12)$ geram o $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, podemos dizer que tais vetores formam uma base para $\mathbb{R}^3$? **Resp.:** Sim, formam uma base.

14. Os conjuntos $B = \{u_1, u_2\}$ e $B' = \{v_1, v_2\}$, em que

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} e\ \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

são bases para o $\mathbb{R}^2$? **Resp.:** Sim.

15. Verifique que o conjunto $\{1, x, x^2\}$ gera o espaço de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2.

16. Classifique em Verdadeiro ou Falso e justifique:
(a) O conjunto $\{(2, -2, 8)\}$ é uma base para o subespaço vetorial
$W = \{(x, y, z)/y = -x, z = 4x\}$. **Resp.:** Verdadeiro.
(b) Sejam v_1, v_2, v_3 vetores L.I.. Nesse caso podemos afirmar que
$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$. **Resp.:** Verdadeiro.

(c) Se u, v e w são L.I., então $u + v$, $u + w$ e $v + w$, são L.I.. **Resp.:** Verdadeiro.

17. Encontre um conjunto de geradores para cada um dos subespaços abaixo:
(a) $U = \{(x, y, z); x - 2y = 0\}$. **Resp.:** $S = \{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
(b) $V = \{(x, y, z); x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$. **Resp.:** $S = \{(2, 1, -2)\}$
(c) $W = \{(x, y, z); x + 2y - 3z = 0\}$. **Resp.:** $S = \{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$

18. Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot, \mathbb{R})$ e considere os vetores $(0, 3, 1, -1)$, $(6, 0, 5, 1)$ e $(4, -7, 1, 3)$. Mostre que esse vetores são linearmente dependentes e escreva cada um deles como combinação linear dos demais.

19. Considere o espaço vetorial das funções reais definidas para $t > 0$. Mostre que as funções abaixo são linearmente independentes:

    (a) t e $\frac{1}{t}$.

    (b) e^t e $\log t$.

    (c) t e e^t.

    (d) 1 e t.

20. Encontre as coordenadas de X em relação a A, B e C.

    (a) $X = (1, 0, 0)$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, 1, 0)$, $C = (1, 0, -1)$.

    (b) $X = (1, 1, 1)$, $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 0, 2)$.

    (c) $X = (0, 0, 1)$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, 1, 0)$, $C = (1, 0, -1)$.

21. Quais são as coordenadas de $f(t) = 3e^t + 5e^{2t}$ em relação a base $\{e^t, e^{2t}\}$? E as de $g(t) = a \sin t + b \cos t$ na base $\{\sin t, \cos t\}$? **Resp.:** $(3, 5)$ e (a, b).

22. Sejam $v_1 = (4, 2, -3)$, $v_2 = (2, 1, -2)$ e $v_3 = (-2, -1, 0)$.

    (a) Mostre que v_1, v_2 e v_3, são LD.

    (b) Mostre que v_1 e v_2 são LI.

    (c) Qual a dimensão do subespaço gerado por v_1, v_2 e v_3? **Resp.:** 2.

23. Determine um conjunto de geradores para o subespaço

$$V = \{(3a + 4b - 4c, 2a - 4b - 6c, -2a - 4b + 2c); a, b, c \in \mathbb{R}^3\}$$

    de $\mathbb{R}^3$. Qual a dimensão de V? **Resp.:** $S = \{(3, 2, -2), (4, -4, -4), (-4, -6, 2)\}$. $\dim V = 2$.

24. Encontre os valores de λ tais que o sistema homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$ tenha solução não trivial e para esses valores, determine uma base para o espaço solução, sendo

    (a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

    (b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

    Resp.: (a) base: $\{(1, -2, 1)\}$; (b) bases: $\{(3, -3, 1, 0)\}$ e $\{(1, 0, 0, 0)\}$.

25. Encontre uma base e a dimensão do espaço solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 4x + 3y - z + 5t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 6x + 2y + 4t = 0 \end{cases}.$$