Universidade Federal de Ouro Preto
4ª Lista de GAAL/MTM730
Professor: Antônio Marcos da Silva

1. Seja $\mathbb{W}$ o plano $x+y+z=0$ e $\mathbb{V}$ o plano $4x-2y+z=0$. Geometricamente, o que representa $\mathbb{W}\cap\mathbb{V}$? Determine uma base para $\mathbb{W}\cap\mathbb{V}$. **Resp.:** Uma reta. Uma base é $\{(-1,-1,2)\}$.

2. Seja $\beta=\{3,2x,-x^2\}$ uma base para $\mathcal{P}_2$. Obtenha as coordenadas do vetor $p(x)=6-4x+3x^2$ em relação a base β. **Resp.:** $[p(x)]_\beta=(2,-2,-3)$

3. Dados os vetores $u=(2,-1,4,0)$, $v=(1,1,2,3)$ e $t=(4,1,8,6)$.

   (a) Determine uma base para o conjunto $S=[u,v,t]$. **Resp.:**$\{(1,0,2,1),(0,1,0,2)\}$ ou $\{(2,-1,4,0),(1,1,2,3)\}$

   (b) Escreva as equações que descrevem S. **Resp.:** $S=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4; 4y+z-2w=0\}$

   (c) Se $(0,a,0,b)\in S$, qual a relação entre a e b? **Resp.:** $b=2a$

4. Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $u=(1,1,1)$ e $v=(1,-1,-1)$. Determine números a, b e c, sabendo-se que um vetor $w=(x,y,z)\in F$ se, e somente se, $ax+by+cz=0$. Sugestão: Determine a normal do plano paralelo aos vetores u e v. **Resp.:** Uma das possíveis respostas é $a=0$, $b=2$ e $c=-2$.

5. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. O subconjunto F de $\mathcal{F}$ formado pelas funções tais que $f(x+1)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, é um subespaço vetorial? **Resp.:** Sim.

6. Mostre que o conjunto $\{1,e^x,e^{2x},e^{3x},e^{4x}\}$ é um conjunto L.I.. Sugestão: Escreva o vetor nulo como combinação linear dessas funções e derivi-a. Depois divida por e^x. Repita esse processo quantas vezes forem necessárias.

7. Considere o vetor $v_1=(0,a,b)$, com $a\neq 0$ e b um número real qualquer. Determine vetores v_2 e v_3 de forma que $\{v_1,v_2,v_3\}$ seja uma base para $\mathbb{R}^3$. **Resp.:** Por exemplo, $v_2=(1,0,0)$ e $v_3=(0,0,1)$.

8. Seja $\mathcal{P}_n$ o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n. Mostre que $\{1,x,x^2,x^3,\cdots,x^n\}$ é uma base para $\mathcal{P}_n$.

9. Considere o conjunto $A=\{v_1,v_2\}$, em que $v_1=(-1,3,-1)$ e $v_2=(1,-2,4)$. Determine:

   (a) o subespaço gerado por A, $[A]$.

   (b) k de forma que $(5,k,11)\in[A]$.

   Resp.: a) $[A]=\{(x,y,z); 10x+3y-z=0\}$; b) $k=-13$.

10. Seja $B=\{(0,1,1),(1,1,0),(1,2,1)\}$.

    (a) Mostre que B não é uma base de $\mathbb{R}^3$.

    (b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que possua dois elementos de B.
    Resp.: Uma possível resposta é $\{(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$

11. Seja

$$\mathbb{S}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}; a,b,c,d\in\mathbb{R}, c=a+b \text{ e } d=a\right\}.$$

    (a) Mostre que $\mathbb{S}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

    (b) Qual a dimensão de $\mathbb{S}$? **Resp.:** 2.

    (c) O conjunto

$$\beta=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4\end{pmatrix}\right\},$$

é uma base para $\mathbb{S}$? Justifique. **Resp.:** Não. Pois, $\beta \not\subset \mathbb{S}$.

12. Seja $W = \{(a+c, b+c, a+b+2c); a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.
    (a) Mostre que W é um subespaço vetorial.
    (b) Determine uma base e a dimesão de W. **Resp.:** $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$. $\dim W = 2$.
13. Qual a dimensão do espaço das matrizes $m \times n$? Determine uma base para esse espaço.
14. Seja V é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Quais são as possíveis dimenões para V?
15. Sejam $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Verifique se $\langle u, v\rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + y_1y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. E, $\langle u, v\rangle = 2x_1y_1 + x_2^2y_2^2$?
16. Sejam $p(t), q(t) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dois polinômios quaisquer. A fórmula

$$\langle p(t), q(t)\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

define um produto interno em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$? **Resp.:** Sim.

17. Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Sabendo-se que $v_1 = (1,2,-3)$, $v_2 = (3,-1,-1)$ e $v_3 = (2,-2,0)$, determine o vetor u tal que $u \cdot v_1 = 4$, $u \cdot v_2 = 6$ e $u \cdot v_3 = 2$. **Resp.:** $u = (3,2,1)$
18. Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ vetores arbitrários. Mostre que se $u \cdot v = u \cdot w$, então $v - w$ é ortogonal a u.
19. (a) Mostre que $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 + z_1z_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$;
    (b) Considerando o produto interno do item anterior, determine um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $u = (1,2,1)$ e $v = (1,1,1)$. **Resp.:** $(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{6}})$
20. Seja $\mathbb{W} = \{(a+c, b+c, a+b+2c); a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
    (a) Mostre que $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.
    (b) Determine um conjunto de geradores para $\mathbb{W}$. **Resp.:** $S = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,2)\}$
    (c) Qual a dimensão de $\mathbb{W}$? **Resp.:** $\dim\mathbb{W} = 2$
21. Obtenha, a partir do vetor $v = (1,-2,1)$ uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$ relativamente ao produto interno usual e, através dela, encontre uma base ortonormal. **Resp.:** Base ortonormal: $\left\{(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\right\}$
22. Dado um vetor $v = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \in \mathbb{R}^n$, mostre que

$$\mathbb{W} = \{u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n; u \cdot v = 0\}$$

é um subespaço do $\mathbb{R}^n$.

23. Seja $B = \{(1,-1),(2,b)\}$ uma base ortogonal do $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = 2x_1x_2 + y_1y_2.$$

Encontre b e determine, a partir de B, uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. **Resp.:** $b = 4$

24. Sejam $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $v = (a, \frac{1}{\sqrt{2}}, -b)$. Para quais valores de a e b, o conjunto $\{u, v\}$ é ortonormal?
25. Determine uma base ortonormal para o plano $x + y + z = 0$.
26. Verifique a desigualdade de Cauchy quando
    (a) $u = (2,-1)$ e $v = (-2,-4)$, considerando o produto interno

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = 2x_1x_2 + 5y_1y_2.$$

(b) $u = -x^2 + x - 3$ e $v = 3x^2 - x + 1$, considerando o produto interno

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0) \cdot (b_2x^2 + b_1x + b_0) = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0. \tag{1}$$

27. Sejam $p_1(x) = x^2 - 2x + 3$ e $p_2(x) = 3x - 4$. Determine, considerando o produto interno (1), $|p_1|$, $|p_2|$, $|p_1 + p_2|$ e o ângulo entre p_1 e p_2. **Resp.:** $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\arccos\frac{-2\sqrt{2}}{5}$

28. Ache as equações dos planos do $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $(2, 2, 2)$, que distam $\sqrt{3}$ do ponto $(1, 1, 1)$. Estes planos são subespaços de $\mathbb{R}^3$? Em caso afirmativo, encontre base(s) ortonormal(is) para ele(s).

29. Um campo elétrico uniforme induz uma força constante dada pelo vetor $F = (10, 2, -5)$ em uma partícula carregada eletricamente. Sejam $A = (1, 1, 3)$, $B = (2, 3, 2)$, $C = (2, 2, 1)$, pontos do $\mathbb{R}^3$, e T_{AB}, T_{BC} e T_{CA} o trabalho realizado de A para B, de B para C, e de C para A, respectivamente. Sabendo que o trabalho total é dado por $T = T_{AB} + T_{BC} + T_{CA}$ e que o trabalho é o produto interno da força pelo vetor deslocamento, encontre o trabalho total realizado quando uma partícula se move na trajetória que começa e termina em A.

30. Um corpo é deslocado em linha reta do ponto $P(-1, 3)$ até o ponto $Q(5, 2)$ por uma força constante $F = (3, 2)$. Qual é o trabalho realizado? **Resp.:** T = 20.

Os exercícios a seguir referem-se a parte de diagonalização de matrizes.

31. Verifique se as matrizes abaixo são diagonálizaveis (sobre os reais). Encontre, se possível, uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$. Determine também, bases para os autoespaços associados a cada autovalor real.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ (h) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Resp.: a) Não é; b) Não é; c) é; d) é; e) é; i) é.

32. Seja A uma matriz $n \times n$. Qual a relação entre os autovalores de A e A^t? **Resp.:** São os mesmos.

33. Assinale como verdadeiro ou falso. Justifique.

(a) Se A não é singular, então 0 não é autovalor de A. **Resp.:** V

(b) As matrizes A e A^2 possuem os mesmos autovetores. **Resp.:** V.

(c) O polinômio característico de uma matriz A de tamanho 2×2 é dado por $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$, em que $\text{tr}(A)$ é o traço de A. **Resp.:** V

(d) A matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & c \end{pmatrix}$ é diagonálizavel para quaisquer valores de a, b e c.

(e) Se λ é uma autovalor de uma matriz invertível A associado a v, então $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor de A^{-1} associado a v. **Resp.:** V

(f) Se o polinômio característico de uma matriz A é

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 4),$$

então $\det A = 36$. **Resp.:** V

(g) Se λ for um autovalor de uma matriz A, então o sistema linear $(A - \lambda I)X = 0$ admite apenas a solução trivial. **Resp.:** F

34. Suponha que o polinômio característico de uma matriz A seja $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)^3$. Responda as questões abaixo, justicando-as.

    (a) Qual o tamanho da matriz A? **Resp.:** 6×6

    (b) A é invertível? **Resp.:** Sim.

    (c) Quantos autoespaços tem A? **Resp.:** 3.

    (d) Encontre $\det A$. **Resp.:** 576.

35. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

    (a) Determine o polinômio característico e os autovalores de A. **Resp.:** $p(\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$.

    (b) Para cada autovalor de A, determine uma base para o autoespaço associado e sua dimensão.

    (c) A é diagonalizável? Por quê? **Resp.:** Sim. Existem 3 autovetores L.I..

    (d) Se possível, encontre matrizes P e D, sendo D diagonal e P invertível, tais que $A = PDP^{-1}$. Se não for possível, explique o motivo.