

Segunda lista de exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III

1) Calcule $\int_C f ds$, onde

(a) $f(x, y) = x + y$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

resp. $1 + \sqrt{2}$.

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ e C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

resp. Zero.

(c) $f(x, y) = y^2$ e C tem equações paramétricas $x = t - \text{sent}$, $y = 1 - \text{cost}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

resp. $\frac{256}{15}$.

2) Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde

(a) $F(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ e C é a parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$.

resp. $-\frac{369}{10}$.

(b) $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ e C é a elipse $4x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido anti-horário.

resp. -4π .

(c) $F(x, y, z) = (yz, xz, x(y + 1))$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, -1)$, percorrida nesta ordem.

resp. Zero.

3) Determine uma função potencial para cada campo gradiente F dado.

(a) $F(x, y) = (e^x \text{sen} y, e^x \text{cos} y)$.

resp. $f(x, y) = e^x \text{sen} y$.

(b) $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

resp. $f(x, y, z) = xy + xz + yz$.

4) Calcule as seguintes integrais, ao longo das curvas C , orientadas positivamente.

(a) $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$; C é a fronteira do quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

resp. Zero.

(b) $\oint_C (e^x - 3y) dx + (e^y - 6x) dy$; C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

resp. $-\frac{3\pi}{2}$.

5) Seja $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} + 3x \right)$ um campo vetorial em \mathbb{R}^2 . Calcule a integral de linha do campo F ao longo da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$ orientada no sentido anti-horário.

resp. 14π .

6) Considere a integral de linha $\int_C (y^2 - xy)dx + k(x^2 - 4xy)dy$.

(a) Determine a constante k para que esta integral seja independente do caminho.

resp. $-\frac{1}{2}$.

(b) Calcular o valor da integral de $A = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$ para o valor de k encontrado no item (a).

resp. $\frac{1}{2}$.

7) Verifique que as seguintes integrais independem do caminho e calcule seus valores.

(a) $\int_{(1,-2)}^{(3,4)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$.

resp. $-\frac{10}{3}$.

(b) $\int_{(0,2)}^{(1,3)} \frac{3x^2}{y} dx - \frac{x^3}{y^2} dy$.

resp. $\frac{1}{3}$.

8) Encontre todos os possíveis valores de $\int_C \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2 + y^2}$, onde C é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

resp. $-2\pi, 2\pi$ e 0 .