Trabalho de Introdução a Lógica e Teoria de Conjuntos

Data de Entrega: 30/03, Quita-feira às 19h.

1) Prove que o conjunto vazio $\emptyset$ é um subconjunto de qualquer conjunto.

(Sugestão: ver teorema provado em sala)

2) Demonstre que

a) $A \subset \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$.

b) Se $A \subsetneq B$ e $B \subset C$ então $A \subsetneq C$.

c) Se $A \subset B$ e $B \subsetneq C$ então $A \subsetneq C$.

3) Em cada um dos seguintes ítens, determine se a afirmativa é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, demonstre-a. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

a) Se $A \not\subset B$ e $B \subset C$ então $A \not\subset C$.

b) Se $A \not\subset B$ e $B \not\subset C$ então $A \not\subset C$.

c) Se $x \in A$ e $A \not\subset B$ então $x \notin B$.

d) Se $A \subset B$ e $x \notin B$ então $x \notin A$.

3) Demonstre que

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

c) $A \subset B \Rightarrow \wp(A) \subset \wp(B)$, onde $\wp(A)$ é o conjunto das partes do conjunto A.

4) Dados dois conjuntos A e B quaisquer, prove que $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

(Sugestão: a prova é análoga ao item (a) do Lema de Morgan provado em aula)

5) Encontre a interseção da família de intervalos: $]0,1[,]0,\dfrac{1}{2}[,]0,\dfrac{1}{3}[, ...$

(Sugestão: Ver exemplo feito em aula)

6) Seja $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ uma família arbitrária de conjuntos. Prove que

$$\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma.$$

(Sugestão: a prova é análoga a prova do item (a) do Teorema de Morgan Generalizado feito em aula)

7) Descreva geometricamente o conjunto $\{(x, y) \in I\!R \times I\!R \mid |x + y| \leq 1\}$ esboçando um gráfico no plano cartesiano.

8) Seja $m \in \mathbb{Z}_+$ fixado. A relação de congruência $\equiv$ módulo m, no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é definida por:

$$x \equiv y(mod\ m) \Leftrightarrow x - y = km, \text{para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que a relação de congruência definida acima é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.
(Sugestão: ver exemplo feito em aula)

9) Seja $f : X \to Y$ uma função e seja $\{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ uma família de subconjuntos de X. Prove que

$$f\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f(A_\gamma).$$

10) Dê contra-exemplo que mostre que não é possível trocar o símbolo de inclusão $\subset$ do exercício 9 por um sinal de igualdade.
(Sugestão: ver exemplo feito em aula)