O conceito de tensor é uma extensão do conceito de vetor, apresentado pelas relações (B.33) e (B.34). Um tensor de segunda ordem é um conjunto de quantidades T_{ab} satisfazendo a relação de transformação

$$T'_{ab} = \sum_{c,d=1}^{3} A_{ac}A_{bd}\,T_{cd} \tag{B.39}$$

Para um tensor de terceira ordem, teríamos

$$T'_{abc} = \sum_{d,e,f=1}^{3} A_{ad}A_{be}A_{ef}\,T_{def} \tag{B.40}$$

E assim por diante. Em todos os casos, a relação (B.34) deve ser sempre satisfeita.

▶ Exercícios

B.1. Dados os vetores $\vec{A} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$ e $\vec{C} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 3\hat{k}$. Determine:

a) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ (resultante entre $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$),
b) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ (resultante entre $\vec{A}$, $\vec{-B}$ e $\vec{C}$),
c) o módulo de $\vec{A}$,
d) o módulo de $\vec{B}$,
e) o módulo de $\vec{A} + \vec{B}$,
f) os ângulos formados por $\vec{A}$ com os x, y e z,
g) o unitário paralelo à resultante entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

B.2. Usando vetores, calcule a distância entre os pontos P = (4, 5, - 7) e Q = (- 3, 6, 12).

B.3. Provar que a reta que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é paralela ao terceiro lado e igual à metade deste.

B.4. Provar que ligando-se os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer, a figura resultante é um paralelogramo.

B.5. Seja O um ponto qualquer no interior de um triângulo A,B,C e sejam P,Q,R os pontos que dividem ao meio os lados AB, BC e CA, respectivamente. Provar que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$. Esta igualdade persiste se o ponto O for exterior ao triângulo?

B.6. Sob que condições o produto escalar é zero?

B.7. Escreva o módulo de um vetor através do produto escalar.

B.8. Sendo $\vec{C}$ a resultante entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, mostre que $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$, sendo θ o ângulo formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

B.9. Mostre que para se projetar um vetor numa certa direção basta multiplicá-lo escalarmente pelo unitário característico da direção.

B.10. Considerando os vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ do exercício 1, calcule:
a) $\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{A}\cdot\vec{C}$ e verifique a propriedade distributiva.
b) o ângulo formado entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e entre $\vec{B}$ e $\vec{A}+\vec{C}$;
c) os módulos de $\vec{A}$, de $\vec{B}$ e de $\vec{A}+\vec{C}$;
d) a projeção do vetor $\vec{A}+\vec{B}$ sobre o vetor $\vec{C}$;
e) os ângulos formados por $\vec{A}$ com x, y e z.

B.11. Determine o valor de a tal que $\vec{A} = 2\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + \hat{k}$ e $\vec{B} = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ sejam perpendiculares.

B.12. Mostre que os vetores $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ e $\vec{C} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$ formam um triângulo e que este triângulo é retângulo.

B.13. Provar que as diagonais de um losângo são perpendiculares.

B.14. Determine o ângulo formado por duas diagonais internas de um cubo.

B.15. Provar que qualquer triângulo inscrito num semicírculo é retângulo, onde a hipotenusa é o diâmetro do semicírculo.

B.16. Mostre que o produto vetorial $\vec{A}\times\vec{B}$, escrito em termos das componentes, é dado por $\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{k}$, que também pode ser expresso por um determinante

$$\vec{A}\times\vec{B} = \det\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

B.17. Dados $\vec{A} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ e $\vec{B} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$,
a) calcule $\vec{A}\times\vec{B}$ (veja exercício anterior);
b) confirme que realmente $\vec{A}\times\vec{B}$ é perpendicular a $\vec{A}$ e $\vec{B}$, mostrando que $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{A} = 0$ e $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{B} = 0$.

B.18. Mostre que $|\vec{A}\times\vec{B}|$ corresponde à área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

B.19. Com o uso do produto vetorial, deduza a chamada lei dos senos, isto é, para um triângulo qualquer formado pelos lados A, B e C tem-se

$$\frac{A}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{B}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{C}{\operatorname{sen}\gamma}$$

onde α, β e γ são os ângulos opostos aos lados A, B e C, respectivamente.

B.20. Usando os conceitos de produtos escalar e vetorial, obtenha as conhecidas relações trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

B.21. Se $\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$ e $\vec{B} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, achar um vetor que tenha módulo 5 e que seja perpendicular aos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

B.22. Se $\vec{A}$ é um vetor constante e $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, mostre que $(\vec{r} - \vec{A}) \cdot \vec{A} = 0$ e $(\vec{r} - \vec{A}) \cdot \vec{r} = 0$ são as equações de um plano e uma esfera, respectivamente.

B.23. Mostrar que grad ϕ é perpendicular à superfície equipotencial que passa pelo ponto onde grad ϕ é tomado.

B.24. Utilize a relação (B.15), quando for necessário, para demonstrar as seguintes identidades vetoriais:

a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$
b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$
c) $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$
d) $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a}$
e) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}\vec{G}$
f) $\operatorname{div}(\phi\vec{F}) = \phi\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad}\phi$
g) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = 0$
h) $\operatorname{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{F} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} + \vec{F} \times \operatorname{rot}\vec{G} + \vec{G} \times \operatorname{rot}\vec{F}$
i) $\operatorname{rot}(\phi\vec{F}) = \phi\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}\phi \times \vec{F}$
j) $\operatorname{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}\operatorname{div}\vec{G} - \vec{G}\operatorname{div}\vec{F} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$
k) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\mathrm{F}} - \nabla^2\vec{F}$
l) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = 0$

B.25. Mostrar que o delta de Kronecker é um tensor de segunda ordem. No Capítulo 13 é visto que o tensor de Levi-Civita é, na verdade, um pseudotensor de terceira ordem.