Para resolver esta integral, façamos a substituição trigonométrica $r = R\,\mathrm{sen}\,\phi$ (com o intuito de eliminar o radical). Assim,

$$d\phi = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,dt \Rightarrow \phi = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,t + \text{const.}. \tag{3.57}$$

Voltando às variáveis de iniciais, temos

$$\text{arc sen}\,\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,t + \text{const.} \Rightarrow r = R\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,t + \text{const.}\right). \tag{3.58}$$

Como para $t = 0$, $r = R$, a constante da relação anterior deve ser portanto $\pi/2$. Assim,

$$r(t) = R\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.59}$$

que é a equação de movimento do metrô. A quantidade $\sqrt{GM/R^3}$ é a freqüência angular. Isto é,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}, \tag{3.60}$$

onde T é o período do movimento. O tempo de viagem é, portanto, meio período. Substituindo os valores numéricos na relação acima encontraremos que o tempo de viagem é apenas 42 minutos!

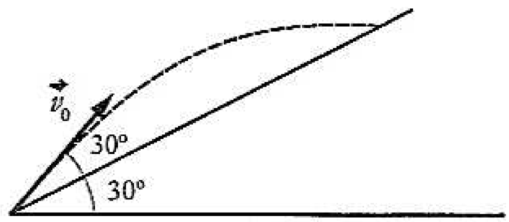
▶ Exercícios

3.1. Discutir o exemplo da Seção 1 considerando os outros sistemas de eixos mostrados na Figura 3.2.

3.2. Um corpo é atirado sobre um plano inclinado com uma velocidade inicial de módulo igual a 5 m/s, como mostra a Figura 3.10. Qual o alcance, computado sobre a superfície do plano inclinado? Com que velocidade a partícula atinge a superfície do plano? Qual deveria ser o ângulo do vetor velocidade com o plano para haver alcance máximo?

3.3. Qual deve ser a altura em relação à superfície da Terra para que o campo gravitacional seja 1% menor do que aquele medido sobre a superfície?

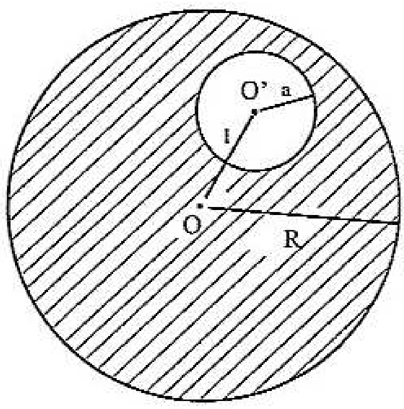
Figura 3.10: Exercício 2.



3.4. A que altura um satélite de comunicação deve ser colocado em órbita, no plano do equador? Qual é o valor do campo gravitacional nos pontos desta órbita?

3.5*. Calcular o campo gravitacional no interior de um buraco esférico de uma distribuição de massa homogênea, também esférica, de densidade ρ, como mostra a Figura 3.11. Compare com o caso particular da casca esférica discutida no texto.

Figura 3.11: Exercício 5.



3.6. Considere o dispositivo de massas mostrado na Figura 3.12, onde m e m' são aproximadamente massas pontuais. Quais as forças que atuam em M, m e m'?

3.7. Calcule o campo gravitacional criado por um disco de raio R e massa M para pontos sobre o eixo de simetria perpendicular ao disco (veja Figura 3.13).

Para pontos onde z muito grande perante R, o disco parecerá um ponto. Faça esta aproximação no resultado que você encontrou e verifique se é obtida a relação do campo gravitacional de uma massa pontual.

Figura 3.12: Exercício 6.

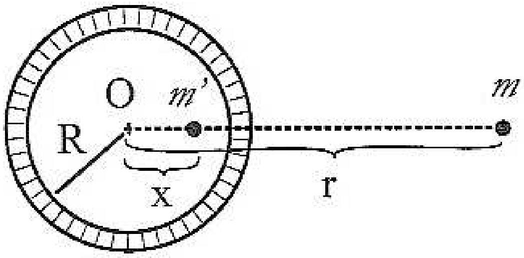
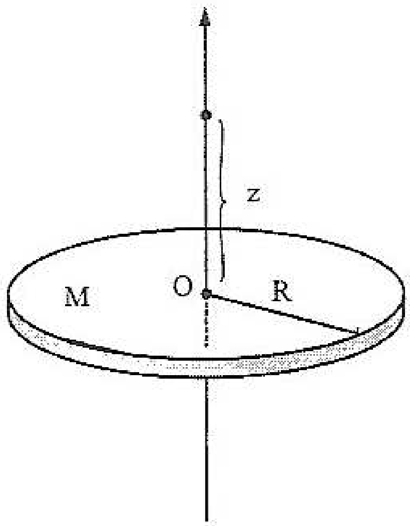


Figura 3.13: Exercício 7.



Calcule, depois, o campo gravitacional criado por uma esfera de massa M e raio R, para pontos fora da esfera, fazendo a superposição de vários discos.

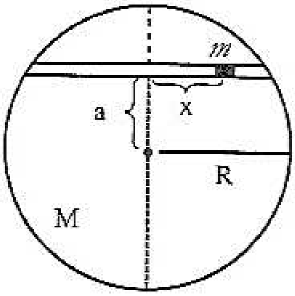
3.8. Resolva as integrais (3.46) e (3.47).

3.9*. Calcule o campo gravitacional criado por uma casca esférica de raio R e massa M, para pontos dentro e fora da casca, usando diretamente coordenadas esféricas.

3.10. Mostre que o movimento do metrô da Figura 3.14 (desprezando o atrito) é também harmônico simples. Calcule o período do movimento e compare-o com o obtido no texto.

3.11. Você viu que o campo gravitacional criado por uma massa M, distribuída uniformemente ao longo de um anel de raio R, para pontos do eixo de simetria z, é dado por [veja expressão (3.40)]

Figura 3.14: Exercício 10.



$$\vec{g} = -\frac{GMz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{k}\,.$$

a) Verifiue se este resultado é consistente com o campo gravitacional criado por uma massa pontual fazendo $z \gg R$.

b) Uma massa m ($m \ll M$) é solta do repouso de uma altura h do eixo de simetria z. Calcule a velocidade v en função de z. É possível, desta expressão, dizer, qualitativamente, como vai ser o movimento?