▶ Exercícios

8.1. Sobre um corpo, movendo-se ao longo do eixo x, atua uma força dada por $\vec{F}(x) = (3x^2 - 6x)\,\hat{\imath}$ Newtons. Qual o trabalho realizado por esta força desde

a) $x = 0$ até $x = 1\,m$?

b) $x = 0$ até $x = 3\,m$?

c) $x = 0$ até $x = 5\,m$?

8.2. Um corpo move-se horizontalmente, ao longo do eixo x, sob a ação da força exercida por uma mola ($\vec{F} = -kx\,\hat{\imath}$). Calcule o trabalho realizado por esta força desde $x = 0$ (posição de equilíbrio da mola) até uma posição arbitrária x, positiva ou negativa.

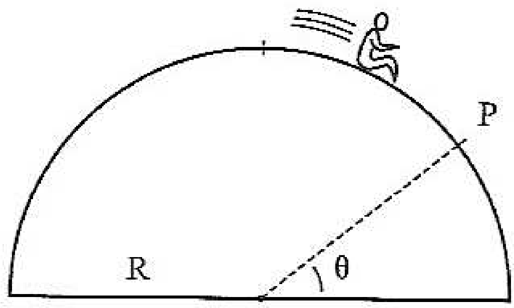
8.3. Sobre uma partícula, age uma força dada por $\vec{F} = x^2y\,\hat{\imath} + y^2x\,\hat{\jmath}$. Calcule o trabalho realizado por esta força desde $(0,0)$ até $(1,1)$ nos seguintes casos:

a) ao longo da reta $y = x$;

b) ao longo da parábola $y = x^2$.

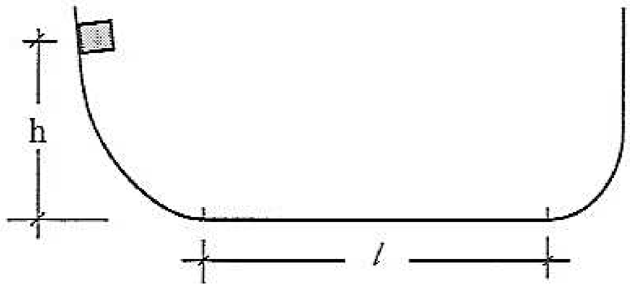
8.4. Um garoto de massa m desliza sobre uma superfície esférica, sem atrito, desde o seu topo, onde estava inicialmente parado (veja Figura 8.17). Determine o ponto P onde ele abandona a supefície e o ponto onde atinge a superfície horizontal.

Figura 8.17: Exercício 4.



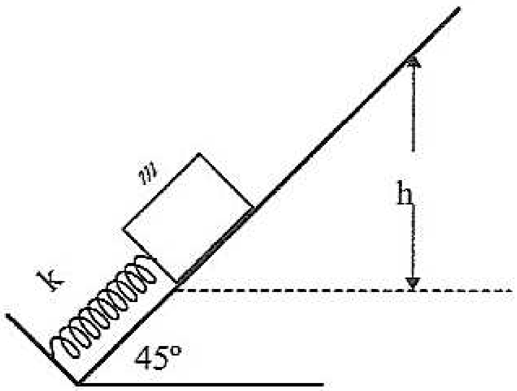
8.5. Um corpo desliza sobre um trilho que como mostra a Figura 8.18. A parte plana do trilho possui comprimento $l = 2,0\,m$ e as partes curvas apresentam atrito desprezível. O coeficiente de atrito cinético na região plana é $\mu_c = 0,20$. Larga-se o corpo no ponto A, cuja altura é $h = 1,0\,m$ acima da parte plana do trilho. Aonde o corpo irá parar?

Figura 8.18: Exercício 5.



8.6. Um bloco de massa $m = 1,0\,kg$ está comprimindo uma mola, num plano inclinado, através de uma agente externo qualquer (veja Figura 8.19 – o agente externo não está especificado na figura), de uma distância $d = 0,1\,m$ em relação à posição de equilíbrio. Num determinado instante, o dispositivo que faz o corpo comprimir a mola é desativado. Qual a altura h atingida pelo corpo, sabendo-se que $\mu_c = 0,5$ e $k = 3,0 \times 10^4\,N/m$?

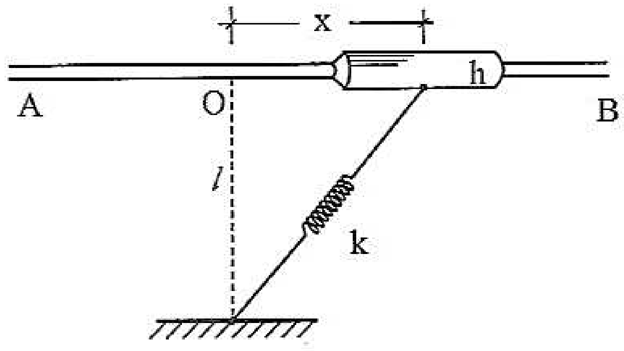
Figura 8.19: Exercício 6.



8.7*. No dispositivo representado na Figura 8.20, a peça P, de massa m, pode deslizar com atrito desprezível ao longo de uma haste fixa AB. O comprimento relaxado da mola é $l_o\,(l_o < l)$. Larga-se a peça com velocidade inicial numa distância x da posição de equilíbrio O. Com que velocidade passará por este ponto?

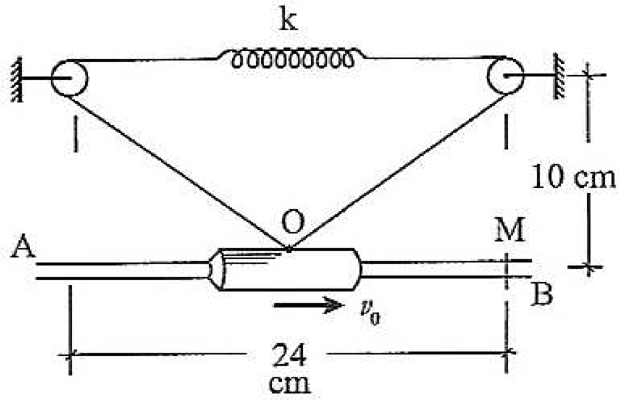
8.8. Uma luva de massa $0,5\,kg$ pode deslizar sem atrito ao longo de uma haste fixa AB. Sabendo-se que a mola está relaxada na configuração simétrica mostrada na Figura 8.21 e que seu coeficiente vale $1,0 \times 10^2\,N/m$, com que velocidade v_o

Figura 8.20: Exercício 7.



a luva deverá passar por O para poder atingir o ponto M. Despreze também o atrito entre as polias e o eixo.

Figura 8.21: Exercício 8.



8.9. Uma partícula, movimentando-se ao longo do eixo x, possui energia potencial dada por $E_p = a\,x^2 - b\,x^3$, onde a e b são constantes positivas.

a) Esboce o gráfico da função $E_p(x)$.

b) Qual é a posição de equilíbrio estável da partícula?

c) Quais são os limites entre os quais deve variar a energia total para que o movimento possa ser oscilatório?

d) Qual é a força que age sobre a partícula em $x = a/b$?

8.10. Uma partícula possui movimento unidimensional numa região onde a força é dada por $\vec{F}(x) = (3x^2 - 6x)\,\hat{\imath}$ Newtons (x em metros).

a) Determine a função energia potencial da partícula sabendo- se que $E_p(0) = 0$. Esboce o gráfico de $E_p(x)$.

b) Para que valores da energia mecânica existe movimento oscilatório?

c) Determine os limites do movimento para $E_M = 3\,J$ e $E_M = 5\,J$.

d) Em que intervalo de valores de x a força na partí cula está dirigida no sentido positivo do eixo x?

e) Para $E_M = 5\,J$, qual é a velocidade da partícula em $x = -1\,m$ e em $x = 4\,m$ (considere $m = 1\,kg$)?

8.11. A energia potencial de interação entre dois átomos de uma molécula diatômica tem aproximadamente a forma

$$E_p(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}},$$

que é chamada *energia potencial de Van der Waals*, onde x é a distância entre os átomos e a e b são constantes positivas.

a) Ache a força de interação?

b) Considerando que um dos átomos é muito pesado e permanece aproximadamente em repouso enquanto o outro se move em linha reta, descreva os possíveis movimentos analisando a curva de energia potencial.

c) Ache o período para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio. Considere m a massa do átomo mais leve.

8.12. Obtenha a expressão da integral dada por (8.62).

8.13. Estude sob o ponto de vista de curvas de potencial o movimento de uma partícula sujeita a uma força atrativa cuja energia potencial é dada por $E_p = -a/r^3$. Idem para $E_p = kr^2/2$ (considerar que o movimento seja bidimensional).

8.14. O conceito de forças conservativas é algo particular. De uma maneira geral, um campo vetorial é dito conservativo se

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0,$$

isto é, se a circulação de $\vec{A}$ ao longo de uma linha fechada qualquer for zero. Como exemplo de campos vetoriais conservativos, além das forças já estudadas, temos o campo elétrico, o campo gravitacional e outros.

Similarmente ao que fizemos na Seção 8.2, temos que o campo conservativo $\vec{A}$ pode ser escrito em termos de um campo escalar que é chamado genericamente de *potencial* (no caso particular de o campo vetorial ser a força, o campo escalar chama- se energia potencial). Assim, o potencial (que chamaremos genericamente de V) é definido por

$$\vec{A} = -\operatorname{grad} V .$$

a) Obtenha a expressão do potencial gravitacional, considerando $V \to 0$ para $r \to \infty$.

b) Repita o cálculo do campo gravitacional para pontos dentro e fora de uma casca esférica de massa M e raio R, visto na Seção 3.3, calculando primeiramente o potencial gravitacional.

c) Idem para o caso do exercício 3.9.

8.15. Mostre que a freqüência angular de vibração, para um sistema semelhante ao discutido na Figura 8.2, só que a partícula é agora vinculada a mover-se sobre um círculo de raio R, é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)\left(1 + \frac{l}{R}\right)} .$$

Verifique que no caso particular de $R \to \infty$ temos o caso anteriormente discutido.

8.16. Uma partícula, sob pequenas oscilações, possui uma energia potencial dada por

$$U = \frac{1}{2} k \left(x^2 + y^2\right) - \alpha\, xy .$$

a) Considerando m a massa da partícula, obtenha as equações de movimento.

b) Ache as freqüências de vibração do sistema e interprete os resultados.

8.17. A Figura 8.22 representa dois pêndulos simples de massa m e comprimento l, acoplados por uma mola de constante elástica k. Esta mola é presa em cada pêndulo a uma distância h do ponto de suspensão. Para $\phi = \gamma = 0$ a mola não está esticada nem comprimida. Estudar as oscilações (pequenas) do sistema no plano vertical.

8.18. Seja o pêndulo invertido representado na Figura 8.23. A haste, onde é fixa a pequena massa m, é livre para se mover na extremidade O e sua massa é desprezível.

a) Qual a condição que devem satisfazer os parâmetros a, b, k e m para que o equilíbrio seja estável?

b) Supondo satisfeita a condição precedente, calcule o período para pequenas oscilações.

Figura 8.22: Exercício 17.

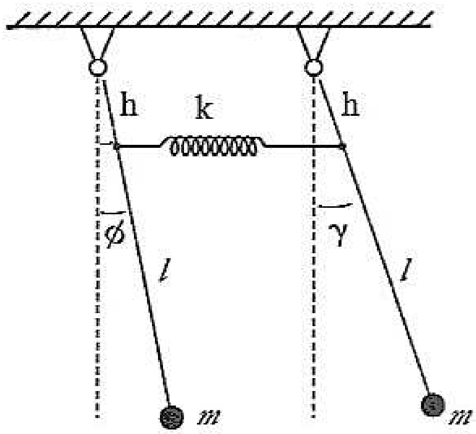
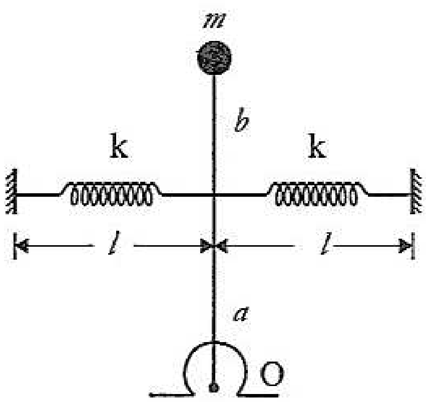


Figura 8.23: Exercício 18.



8.19. A energia potencial de interação entre os átomos de uma molécula de HCl é dada com boa aproximação pelo chamado *potencial de Morse*: $E_p(r) = D\,[1 - e^{-a(r-r_o)}]^2$, onde D, a e r_o são três constantes positivas. r é a distância entre os dois átomos.

a) Esboce o gráfico da energia potencial. Qual é a distância do equilíbrio entre os átomos?

b) Qual é a freqüência das pequenas oscilações da molécula? (Medidas espectográficas mostram que essas freqüências são da ordem de $10^{14}\,hz$.)

c) Qual é o valor da ordem de grandeza da força de interação para $r - r_o = 0,2$ (angstrom) $(1 = 10^{-10}m)$?

8.20. Considere no movimento subamortecido que $\gamma \ll \omega_o$. Mostre que, nesta aproximação, a energia mecânica é dada por $E \simeq \frac{1}{2}kA^2\,e^{-2\gamma t} = E_o\,e^{-2\gamma t}$, onde

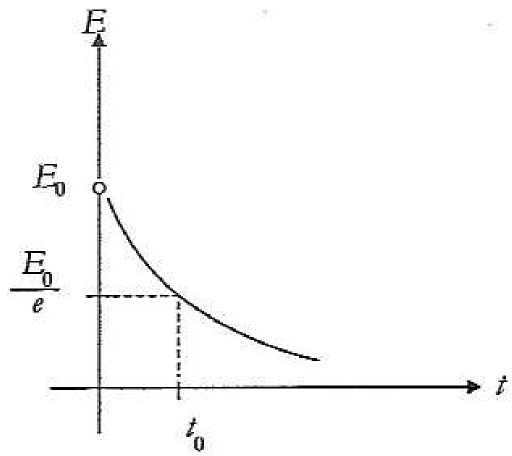
E_o é a energia mecânica do oscilador harmônico simples.

8.21. A energia de um oscilador subamortecido, considerando $\omega_o \gg \gamma$, decai com o tempo aproximadamente de acordo com o gráfico da Figura 8.24. Supondo conhecidos E_o, t_o e a constante elástica k do oscilador, calcule:

a) o coeficiente de amortecimento γ;

b) a amplitude do movimento no intante t_o.

Figura 8.24: Exercício 21.



8.22. Prove que para as oscilações forçadas de um oscilador amortecido, a potência média da força aplicada é igual à potência média dissipada pela força amortecedora, na situação estacionaária.

8.23. O vetor posição de um corpo possuindo $6\,kg$ é dado (em metros) por $\vec{r}(t) = (3t^2 - 6t)\,\hat{\imath} - 4t^3\,\hat{\jmath} + (3t + 2)\,\hat{k}$.

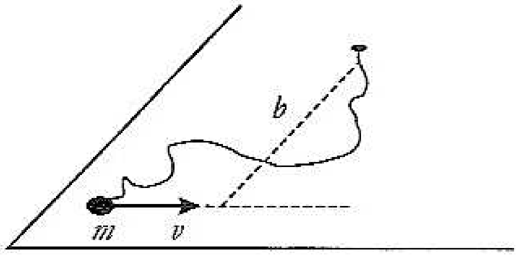
a) Usando a definição de torque, calcule diretamente o torque que atua sobre o corpo.

b) Faça o mesmo com o momento angular.

c) Verifique a relação $\vec{\tau} = d\vec{l}/dt$.

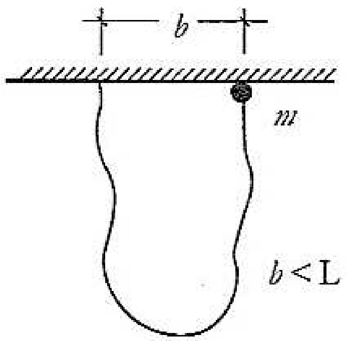
8.24*. Um corpo de massa m está ligado a um fio de massa desprezível e de comprimento L. A outra extremidade do fio está amarrada a um prego fixo em uma superfície plana sem atrito. O corpo possui uma velocidade inicial de módulo V e passa a uma distância b do prego ($b < L$) (veja Figura 8.25). Quando o corpo chega ao fim do fio, este permanece esticado e corpo passa a se mover em trajetória circular. Qual será a velocidade angular do corpo? O movimento linear se conserva? E a energia mecânica?

Figura 8.25: Exercício 24.



8.25*. Um pequeno corpo de massa m é preso por um fio de massa desprezível e possuindo comprimento L. Este sistema está inicialmente disposto como indica a Figura 8.26. Em determinado instante o corpo é solto a partir do repouso. Supondo que após o fio esticar o movimento seja oscilatório, qual será o ângulo máximo que este pêndulo fará com a vertical?

Figura 8.26: Exercício 25.



8.26. Mostre que o vetor de Rung-Lenz é perpendicular ao vetor momento angular.

8.27. Partindo de (8.89) e (8.90), obtenha a relação (8.92).

8.28. Obtenha (8.95).

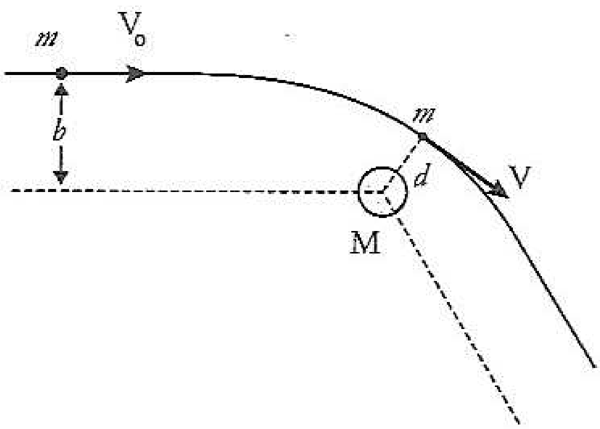
8.29. Da relação (8.95), calcule a seção de choque total. Você deverá encontrar um resultado infinito. Qual é a interpretação disto?

8.30. Um cometa de massa m incide contra um planeta de massa M, descrevendo uma trajetória como a indicada na Figura 8.27. Considere $M \gg m$, tal que M pode ser considerado aproximadamente em repouso.

a) Quais são as quantidades conservadas no movimento? Justifique.

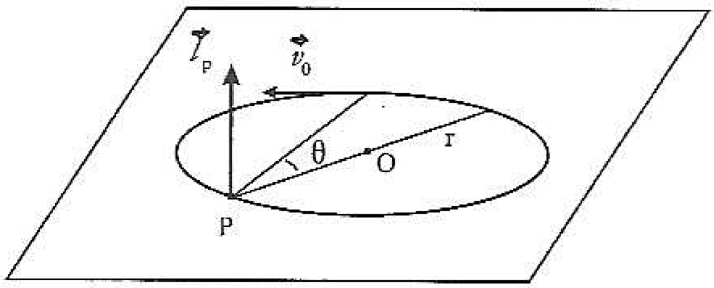
b) Considere que inicialmente o cometa esteja muito afastado do planeta, tal que a energia potencial gravitacional entre eles possa ser desprezada nesta posição. Calcule o módulo da velocidade $\vec{V}$ do cometa no ponto de maior aproximação, bem como a distância deste ponto ao centro do planeta, em termos de b, V_o, M e G.

Figura 8.27: Exercício 30.



8.31. Seja uma partícula num movimento circular uniforme. Calcule o momento angular em relação a um ponto qualquer P da circunferência (veja Figura 8.28). O momento angular é constante?

Figura 8.28: Exercício 31.



8.32. Faça o mesmo desenvolvimento para obtenção de (8.5), mas usando a expressão do momento relativístico [veja (6.21)]. Mostre que a energia cinética relativística é dada por

$$E_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - mc^2 .$$

Verifique se esta expressão leva à (8.5) para $v \ll c$. Observe ainda que na expressão relativística da energia cinética há a subtração de um termo, mc^2, que corresponde a uma energia de repouso da partícula. Ou seja, relativisticamente, a uma partícula de massa m em repouso pode-se associar uma energia dada por mc^2. Podemos, então, de uma maneira geral, incluindo a enegia de repouso, dizer que uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ possui uma energia dada por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} .$$

8.33. Três partículas de mesma massa m estão vinculadas a se moverem sobre um círculo e presas uma às outras através de molas de constante k (veja Figura 8.29). Considere que na posição de equilíbrio as molas não estão esticadas nem comprimidas e que as distâncias entre as partículas sejam iguais.

a) Mostre que a energia potencial do sistema é dada por

$$E_p = \frac{k}{2}\left[(\xi_2-\xi_1)^2 + (\xi_3-\xi_2)^2 + (\xi_3-\xi_1)^2\right],$$

onde ξ_1, ξ_2 e ξ_3 são deslocamentos das partículas 1, 2 e 3, respectivamente, em torno da posição de equilíbrio.

b) Obtenha as equações diferenciais do movimento das partículas e as freqüências normais de vibração do sistema.

8.34. Um corpo de massa m move-se sob a ação de uma força central dada por $\vec{F} = -k\vec{r}$.

a) Escreva as quantidades conservadas e explique por que se conservam.

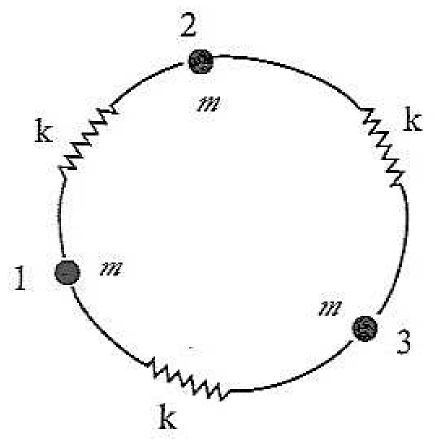
b) Faça um estudo qualitativo do movimento através das curvas de potencial.

8.35. Duas massas m_1 e m_2, presas a uma mola, deslocam-se ao longo do eixo x. Considere que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam as posições das duas massas no instante t e que quando a distância entre elas é b a mola não está esticada nem comprimida.

a) Escreva a energia potencial do sistema.

b) Considere $x_1(t) = x_{10} + \xi_1(t)$ e $x_2(t) = x_{20} + \xi_2(t)$, onde x_{10} e x_{20} são posições de equilíbrio ($x_{20} - x_{10} = b$) e ξ_1 e ξ_2 são deslocamentos no entorno da posição de equilíbrio (não são, necessariamente, pequenos deslocamentos). Obtenha as equações de movimento para cada partícula em termos de ξ_1 e ξ_2.

Figura 8.29: Exercício 33.



c) Obtenha as freqüências próprias de vibração do sistema. Interprete o que significa cada resultado.