COMPUTAÇÃO SIMBÓLICA NO ENSINO MÉDIO COM O SOFTWARE GRATUITO GEOGEBRA

Humberto José Bortolossi – Dirce Uesu Pesco – Wanderley Moura Rezende
hjbortol@vm.uff.br – dirceuesu@gmail.com – wmrezende@id.uff.br
Universidade Federal Fluminense/Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro – Brasil

Modalidade: Oficina (Taller).
Nível educativo: Médio (11 a 17 anos)
Palavras-chaves: GeoGebra, Computação Simbólica, Ensino Médio

Resumo

Sistemas de Computação Simbólica são softwares matemáticos que permitem lidar com símbolos e obter respostas exatas para muitos problemas matemáticos, como a fatoração de números inteiros e polinômios, operações com matrizes, resolução de sistemas lineares e não lineares de equações, operações com números complexos, simplificações de expressões, cálculo de limites, derivadas e integrais, resolução de equações diferenciais, etc. Cálculos aproximados podem ser feitos com um número arbitrário de dígitos (limitado apenas pela memória do computador). Todos estes atributos fazem de um sistema de computação simbólica um laboratório excepcional para o desenvolvimento, ensino e aprendizagem da matemática. Nesta oficina exploraremos os recursos de computação simbólica do software gratuito GeoGebra 4.2 através de uma sequência de exercícios orientados para a matemática do Ensino Médio. Esperamos que o participante da oficina aprecie as potencialidades e perceba as limitações desse tipo de ferramenta.

Introdução

Um *Sistema de Computação Simbólica* (*Computer Algebra System* ou CAS, em inglês) é um software que permite realizar várias tarefas matemáticas simbolicamente. Ao contrário do que ocorre com as calculadoras usuais, um CAS permite obter respostas exatas, isto é, em aproximações. Métodos numéricos de precisão arbitrária (ou seja, com o número de dígitos limitado apenas pela memória do computador) também estão disponíveis.

As tarefas matemáticas típicas de um CAS incluem: cálculos aritméticos, simplificações de expressões algébricas, substituições de símbolos em expressões, resoluções de equações e sistemas de equações lineares e não lineares, cálculos matriciais, cálculos de derivadas e integrais, resoluções de equações diferenciais ordinárias e parciais, etc.

Vários sistemas de computação simbólica comerciais e gratuitos para diferentes plataformas (Windows, Linux, Mac OS) estão disponíveis atualmente. Entre os comerciais, destacamos o software Maple (http://www.maple.com/) e o software Mathematica (http://www.wolfram.com/). Entre os sistemas de computação simbólica gratuitos, destacamos o excelente software Maxima (http://maxima.sourceforge.net/).

Um dos grandes recursos incluídos na versão 4.2 do GeoGebra (em estágio beta, mas com previsão de ser lançado oficialmente ainda no ano de 2012) está a Janela CAS, uma janela a partir da qual um usuário poderá conduzir cálculos simbólicos dentro do GeoGebra. Como de costume, a Janela CAS está integrada com as demais janelas do software (Janela de Álgebra, Janela de Visualização).

Existem vários estudos sobre o uso de sistemas de computação simbólica para o ensino e aprendizagem da matemática (veja, por exemplo, as referências (GUIN, RUTHVEN & TROUCHE, 2005) e (LI, WANG & ZHANG, 2007)), contudo, a ênfase se dá principalmente em questões relacionadas com o cálculo diferencial e integral (no Brasil, a maioria dos alunos do Ensino Médio não estuda esse tópico, ficando o tema reservado para os primeiros semestres do ensino universitário).

O objetivo principal dessa oficina é o de apresentar e explorar exemplos de como recursos de computação simbólica podem ser trabalhados com tópicos mais elementares do Ensino Médio. Esperamos assim que o participante da oficina aprecie as potencialidades e perceba as limitações desse tipo de ferramenta. O material apresentado parcialmente aqui tem sido usado na disciplina “Informática no Ensino da Matemática” para o curso de licenciatura em matemática do Sistema CEDERJ/UAB.

Alguns exemplos de exercícios em aritmética

Os exercícios que apresentamos nesta seção são trabalhados em nossa disciplina logo após a apresentação da sintaxe básica das operações aritméticas (soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, fatorial) e do comando Fatorar[] (que calcula a decomposição em fatores primos de um número natural) da Janela CAS do GeoGebra 4.2. Nessa apresentação, um dos exemplos dados é o seguinte: o cálculo de 1/3 na Janela CAS do GeoGebra. Em geral, as pessoas ficam surpresas com a resposta dada pelo GeoGebra: 1/3. Elas esperam ver (como em uma calculadora), o número 0.33333333. Nossa impressão é que, em geral, as pessoas não percebem o processo de aproximação inerente às calculadoras usuais, isto é, elas não percebem que a resposta 0.33333333 dada por uma calculadora usual não é igual a 1/3, mas, sim, uma aproximação de 1/3. Em outras palavras, o pensamento (errado) geral é que os resultados apresentados por uma calculadora usual são sempre exatos e eles não são. Em nossa opinião, poder evidenciar esse fato já demonstra uma qualidade didática dos sistemas de computação simbólica.

Exemplo 1. Considere os seguintes números racionais a = 8712870/48506557 e b = 505149/2812281. Eles são iguais? (a) Tente obter uma resposta usando uma calculadora de bolso comum! (b) Tente obter uma resposta usando a Janela CAS do GeoGebra! (c) Tente obter uma resposta usando apenas lápis e papel, sem recurso computacional algum! Os três métodos produziram a mesma resposta? Elabore sobre o assunto!

Este exercício tem vários desdobramentos. Primeiro, ele evidencia a limitação de uma calculadora comum: os números a e b são, de fato, diferentes, mas, ao tentar calculá-los, os números exibidos no visor da calculadora são iguais. Muitas pessoas concluem (erroneamente) a partir desse fato que a e b são iguais! Segundo, que estratégias podemos usar para resolver o Item (b)? Aqui podemos usar o GeoGebra para calcular a diferença $a - b$: a será igual a b se, e somente se, $a - b$ for igual a 0. Outra estratégia: usar o GeoGebra para calcular a divisão a/b: a será igual a b se, e somente se, a/b for igual a 1. Por fim, que estratégias podemos usar para resolver o Item (c)? Aqui lembramos que se r, s, t e u são números inteiros positivos, então $r/s = t/u$ se, e somente se, $ru = st$. Em nosso caso, $r = 8712870$, $s = 48506557$, $t = 505149$ e $u = 2812281$. Observe que ru é diferente de st, pois ru tem a casa das unidades igual a 0, enquanto que st tem a casa das unidades igual a 3. Sendo assim, $r/s = 8712870/48506557$ é diferente de $t/u = 505149/2812281$.

Exemplo 2. Considere os números naturais $a = 2^{3000}$ e $b = 3^{2000}$. Qual número é maior? (a) Tente obter uma resposta usando uma calculadora de bolso! (b) Tente obter uma resposta usando a Janela CAS do GeoGebra! (c) Tente obter uma resposta usando apenas lápis e papel, sem recurso computacional algum! Os três métodos produziram a mesma resposta? Elabore sobre o assunto!

Este exercício também tem vários desdobramentos. Primeiro, ele evidencia outra limitação de uma calculadora comum: se comparado com os sistemas de computação simbólica, menos números podem ser representados (mesmo de forma aproximada). Assim, ao tentar calcular 2^{3000}, uma mensagem de erro deverá aparecer no visor da calculadora. O cálculo de 2^{3000} pode ser facilmente conduzido na Janela CAS do GeoGebra (experimente!). As mesmas estratégias propostas para o Item (b) do Exemplo 1 podem ser usadas para resolver o Item (b) do Exemplo 2. Por fim, que estratégias podemos usar para resolver o Item (c) do Exemplo 2? Em geral, as pessoas pensam inicialmente que não é possível resolver o Item (c) com lápis e papel por conta dos números envolvidos. Contudo, uma vez que $a = 2^{3000} = (2^3)^{1000} = 8^{1000}$ e $b = 3^{2000} = (3^2)^{1000} = 9^{1000}$, segue-se que a é menor do que b.

Exemplo 3. Quantos divisores positivos possui 10!? Lembre-se que 0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 × 1, 3! = 3 × 2 × 1, 4! = 4 × 3 × 2 × 1, etc. Descreva como você obteve sua resposta (com ou sem o GeoGebra)!

O objetivo aqui é explorar aplicações do Teorema Fundamental da Aritmética usando o comando Fatorar[] da Janela CAS do GeoGebra. O comando Fatorar[10!] nos diz que $10! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^1$. Por outro lado, observe que se d é um divisor positivo de 10!, então d deve ser da forma $2^r \times 3^s \times 5^t \times 7^u$, com r, s, t e u números inteiros satisfazendo $0 \leq r \leq 8$, $0 \leq s \leq 4$, $0 \leq t \leq 2$ e $0 \leq u \leq 1$. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, 10! possui 9 × 6 × 4 × 2 = 270 divisores positivos.

Exemplo 4. Quantos zeros aparecem no final da representação decimal de 1000!? Descreva como você obteve sua resposta (com ou sem o GeoGebra)!

Muitos resolvem esse exercício calculando primeiro 1000! na Janela CAS do GeoGebra para, depois, contar manualmente o número de zeros que aparecem no final. Será que não existe uma outra maneira "mais matemática" de se resolver esse exercício? Sim! Basta novamente usar o Teorema Fundamental da Aritmética e o comando Fatorar[] da Janela CAS do GeoGebra. De fato, o comando Fatorar[1000!] nos diz que $1000! = 2^{994} \times 3^{498} \times 5^{249} \times 7^{164} \times ... \times 997^1$. Agora, se existe um zero no final da representação decimal um número inteiro positivo, é porque o número é divisível por 10, isto é, ele deve ser divisível por 2 e por 5 ao mesmo tempo. Sendo assim, cada zero implica em uma divisão por 2 e por 5. Moral: o número de zeros é igual a quantidade mínima de 2 e 5 que aparecem na decomposição em fatores primos do número! Como na decomposição em fatores primos de 1000! aparecem 994 números 2 e 249 números 5, concluímos, portanto, que existem 249 zeros no final da representação decimal de 1000!.

Alguns exemplos de exercícios em álgebra

Além de números, os sistemas de computação simbólica também reconhecem e manipulam expressões algébricas. Por exemplo, se um usuário digitar $x + 2\,x$ em uma linha de entrada da Janela CAS do GeoGebra, ao pressionar a tecla ENTER (para executar o comando da linha de entrada), aparecerá como resultado a expressão $3\,x$. Expressões algébricas podem ser expandidas (por exemplo, a expressão algébrica $(a - 2)(a - 3)$ é automaticamente substituída por $a^2 - 5a + 6$) ou fatoradas (por exemplo, o comando Fatorar[$6\,a^2 - 5\,a + 1$] dá como resultado $(3\,a - 2)(2\,a - 1)$). Todos esses recursos permitem elaborar vários exercícios interessantes.

Os três exercícios que destacamos a seguir tem a seguinte característica: eles desafiam a habilidade e a paciência humana na manipulação de expressões algébricas. O corolário que queremos estabelecer com esses exercícios é o de que sistemas de computação simbólica podem nos livrar de cálculos tediosos de modo que possamos nos concentrar em outros quesitos.

Exemplo 5. Use o GeoGebra para mostrar que

$$(a\,d - b\,c)(p\,s - r\,q) = (a\,p + b\,r)(c\,q + d\,s) - (a\,q + b\,s)(c\,p + d\,r),$$

para todo a, b, c, d, p, q, r e s reais. Tente demonstrar essa identidade usando apenas lápis e papel!

Exemplo 6. Sejam $u = (a - b)/(a + b)$, $v = (b - c)/(b + c)$ e $w = (c - a)/(c + a)$. Use o GeoGebra para mostrar que $(1 + u)\,(1 + v)\,(1 + w) = (1 - u)\,(1 - v)\,(1 - w)$. Tente demonstrar essa identidade usando apenas lápis e papel!

Exemplo 7. Use o GeoGebra para mostrar que se a, b e c são números diferentes de zero, dois a dois distintos e tais que $a + b + c = 0$, então

$$\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)=9.$$

Tente demonstrar essa identidade usando apenas lápis e papel!

Alguns exemplos de limitações em sistemas de computação algébrica

Indicamos aqui duas limitações importantes presentes na maioria dos sistemas de computação algébrica. Essencialmente, as duas limitações tem uma mesma origem: a hipótese implícita assumida por esses sistemas de que certas expressões são não nulas.

Como primeiro exemplo, considere a seguinte situação: um usuário digitou $(x^2 - 4)/(x - 2)$ em uma linha de entrada da Janela CAS do GeoGebra e, ao pressionar a tecla ENTER, obteve como resposta a expressão $x + 2$. Este resultado está correto? Por exemplo, se $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ e $g(x) = x + 2$ são funções reais, podemos afirmar que $f = g$? A reposta é não! As funções f e g são funções diferentes, pois possuem domínios (efetivos) diferentes: o número real 2 não pertence ao domínio (efetivo) de f, mas pertence ao domínio (efetivo) de g. Somente para valores de x diferentes de 2, isto é, para valores de x tais que $x - 2$ é diferente de zero, $f(x) = g(x)$, ou seja, $(x^2 - 4)/(x - 2) = x + 2$. O GeoGebra implicitamente (e automaticamente) assumiu a hipótese de que $x - 2$ é diferente de zero ao simplificar a expressão $(x^2 - 4)/(x - 2)$ em $x + 2$.

Como segundo exemplo, considere a situação em que queiramos resolver a equação $a\,x - 2 = 4$ em x. A Janela CAS do GeoGebra disponibiliza um comando para resolver equações: Resolver[]. A resposta dada pelo comando Resolver[$a\ x - 2 = 4$, x] é

$\{x = 6/a\}$. Este resultado está correto? A resposta é não! Se a for igual a zero, a equação $a\ x - 2 = 4$ não possui soluções. Note, portanto, que novamente o GeoGebra implicitamente (e automaticamente) assumiu a hipótese de que a é diferente de zero ao resolver a equação $a\ x - 2 = 4$ em x.

Referencias bibliográficas

- Guin, D., Ruthven, K. & Trouche, L. (Eds.). (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning A Computational Device into A Mathematical Intrument.* Boston: Springer-Verlag.
- Li, S., Wang, D. & Zhang, J.-Z. (Eds.). (2007). *Symbolic Computation and Education*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.