Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Matemática

MTM124 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

Antônio Silva, Edney Oliveira, Marcos Marcial, Wenderson Ferreira

Lista de Exercícios 1

1. Para cada um dos seguintes pares de equações paramétricas, esboce a curva e determine sua equação cartesiana.

   (a) $x = -1 + t$, $y = 2 - t$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) $x = \cos^2 t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$, $t \in \mathbb{R}$.

   (c) $x = -1 + t^2$, $y = 2 - t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

   (d) $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in \mathbb{R}$.

   (e) $x = 3\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $t \in \mathbb{R}$.

   (f) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos^2 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. Faça um esboço das curvas definidas pelas seguintes funções vetoriais:

   (a) $\sigma(t) = (2, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) $\sigma(t) = (t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (c) $\sigma(t) = (3, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi]$.

   (d) $\sigma(t) = (t^2 - 1, 2, t)$, $t \in [0, \infty)$.

3. Dê uma parametrização para cada uma das curvas:

   (a) a reta $2x - 3y = 6$.

   (b) a parábola $x^2 = 4ay$, $a \in \mathbb{R}$.

   (c) a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq 0$.

   (d) a circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

   (e) o ramo da hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq 1$.

4. Um ponto $P = (x, y, z)$ se move em torno do eixo-z mantendo uma distância constante $a > 0$ desse eixo. Simultaneamente, ele se move paralelamente ao eixo-z de modo que sua terceira componente é proporcional ao ângulo de rotação com constante de proporcionalidade $b \neq 0$. A curva descrita por esse ponto é chamada **hélice circular**. Determine uma parametrização para a hélice circular descrita com parâmetro sendo o angulo de rotação.

5. Seja C a curva definida por $\sigma(t) = (2\cos t, 1 + 2\operatorname{sen} t)$. Determine uma equação da reta normal e uma equação da reta tangente à curva no ponto $(\sqrt{3}, 2)$.

6. Seja σ a função vetorial definida por

$$\sigma(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1 \right).$$

   Mostre que o ângulo entre $\sigma(t)$ e $\sigma'(t)$ é constante, isto é, independe de t.

7. Mostre que, se $\sigma(t)$, $t \in I$ é uma parametrização de uma reta, então $\sigma''(t)$ é paralelo a $\sigma'(t)$.

8. Dadas as equações paramétricas

$$x = \cosh t, \quad \text{e } y = \operatorname{senh} t$$

   (a) Faça um esboço do gráfico definido por essas equações.

   (b) Ache uma equação cartesiana do gráfico.

9. Dadas as equações paramétricas

$$x = 3t^2, \quad \text{e } y = 4t^3$$

   ache $\dfrac{dy}{dt}$ e $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ sem eliminar t.

10. Dada a cicloide descrita pelas equações

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad \text{e } y = a(1 - \cos t) \qquad (a > 0)$$

   obtenha $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ e $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ no ponto em que y atinge o seu valor máximo para x em $[0, 2\pi a]$.

11. Um objeto inicia seu movimento no ponto $(0, -4)$, e se move ao longo da parábola $y = x^2 - 4$, com velocidade horizontal $\dfrac{dx}{dt} = 2t - 1$. Encontre o vetor posição do objeto, os vetores velocidade e aceleração no instante $t = 2$.

12. Dois carros se movem sobre pistas circulares concêntricas de raios 1 km 2 km, respectivamente. O primeiro com velocidade angular constantes de 20 rotações por hora. O segundo, parte do repouso, e mantêm aceleração angular constante de 40rd/h^2. Suponha que no instante inicial os dois arros estão emparelhados.

   (a) Encontre os vetores posição para os dois movimentos.

   (b) Quanto tempo leva o segundo carro para se emparelhar novamente com o primeiro?

   (c) Ache a velocidade do segundo carro nesse instante.

13. Esboce o gráfico e calcule o comprimento de arco das seguintes curvas:

   (a) $x = t,\ y = bt,\ z = ct,\ 0 \leq t \leq 1.$

   (b) $x = 2\cos t,\ y = 3t,\ z = 2\sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi.$

   (c) $x = 2t + 1,\ y = -t + 2,\ z = -3,\ -1 \leq t \leq \dfrac{3}{2}.$

   (d) $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 13,\ \alpha \leq t \leq \beta.$

14. Determine o comprimento da hélice C parametrizada por

$$\sigma(t) = (\cos 3t, \operatorname{sen} 3t, 4t),\ 0 \leqslant t \leqslant 4\pi.$$

15. Encontre o comprimento do caminho percorrido por uma partícula que se move ao longo das curvas de equações dadas durante o intervalo de tempo especificado em cada um dos casos abaixo:

(a) $\sigma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2$.

(b) $\sigma(t) = (a(\cos t + t \operatorname{sen} t), a(\operatorname{sen} t - t\cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) $\sigma(t) = (t, 3t^2, 6t^3)$, $0 \leq t \leq 2$.

(d) $\sigma(t) = (t, \ln(\sec t), \ln(\sec t + \operatorname{tg} t))$, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{4}$.

16. Uma partícula se move ao longo da involuta de equações paramétricas

$$x = \cos t + t \operatorname{sen} t, \;\; y = \operatorname{sen} t - t\cos t, \quad (t > 0)$$

(a) Determine as componentes tangencial e normal da aceleração.

(b) Determine os vetores $T\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ e $A\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

17. Determine o raio de curvatura da curva $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

18. Mostre que a curvatura máxima da curva $y = \ln(x)$ é $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$, a qual ocorre no ponto $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\ln(2)}{2}\right)$.

19. As equações paramétricas da trajetória de um cometa são dadas em função do tempo por

$$x(t) = 200\cos t, \text{ e } y(t) = 10 \operatorname{sen} t, \;\; 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

onde 200 e 10 são medidas expressas em unidades astronômicas (U.A.). Calcule a curvatura da órbita em um ponto qualquer da mesma.

20. Determine a curvatura e a torção da hélice C parametrizada por

$$\sigma(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a \operatorname{sen}\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right), \;\; s \in \mathbb{R}$$

21. Determine o comprimento de arco das seguintes curvas nos intervalos dados:

(a) $x = e^t \cos t, \;\; y = e^t, \;\; z = e^t \sin t, \;\; 0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $x = t^2, \;\; y = t\sin t, \;\; z = t\cos t, 0 \leq t \leq \pi$.

(c) $x = 3t^2, \;\; y = t^3, z = 6t, \;\; 1 \leq t \leq 2$.

(d) $x = \;\cos^3 t, \;\; y = a\sin^3 t, \;\; z = 1, \;\; 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

(e) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^{\frac{2}{3}}\vec{j} + 6\vec{k}$, $1 \leq t < 4$.

22. Escreva a equação vetorial da curva obtida pela interseção das superfícies:

(a) $y = e^x$ e $z = xy$.

(b) $x^2 + y^2 = 4$ e $x + 2y + z = 1$.

(c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = 1 + y$.

23. Escreva uma equação cartesiana que represente as seguintes curvas:

(a) $\vec{r}(\theta) = (\sec\theta, 3, 2\operatorname{tg}\theta)$, $\dfrac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

(b) $\vec{r}(t) = (t + 3, 0, 4t^2 - 1)$, $t > 0$.

(c) $\vec{r}(\theta) = (2\cos\theta, 12\sin\theta, \operatorname{tg}\theta)$, $\dfrac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

(d) $\vec{r}(\theta) = (2 + 3\cos\theta, 5 + 3\sin\theta, 19)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

24. Determine o domínio das funções vetoriais:

(a) $\vec{r} = t^{-1}\vec{i} + \sqrt{te^t}\vec{j} + te^t\vec{k}$.

(b) $\vec{r} = \sin t\vec{i} + \sqrt{e^t}\vec{j} + \sec t\vec{k}$.

(c) $\vec{r} = \ln(t^2-9)\vec{i} + \operatorname{arctg} t\vec{j} + \sinh(t^2)\vec{k}$.

(d) $\vec{r} = \dfrac{t^3-1}{t^2-5t+6}\vec{i} + \dfrac{\ln t}{t}\vec{j} + ((1-t)^{\frac{1}{4}} - 5)\vec{k}$.

25. Sendo dadas $\vec{r}(t) = (e^t, -\cos t, \sin t)$ e $\vec{s}(t) = (t^2, \sin t, \cos t)$, determine:

(a) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}(t) + \vec{s}(t))$.

(b) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}(t) \cdot \vec{s}(t))$.

(c) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}(t) \times \vec{s}(t))$.

26. Determine os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(t\sin\frac{1}{t}, 2\cos t, 2 + e^{\operatorname{tg} t}\right)$.

(b) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{a^t - b^t}{t}, (1+t)^{5/t}, \frac{t}{\sin(2t)}\right)$, em que $a, b > 0$.

(c) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{3t+3}-\sqrt{3}}{t}, \frac{t^2-4}{t+2}, \sec t - t\right)$.

(d) $\displaystyle\lim_{t\to 3}\left(\frac{t^2-6t+9}{t-3}, \frac{t-a}{|t-a|}, \frac{\sqrt{t}-\sqrt{3}}{t-3}\right)$, em que $a > 3$.

(e) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\left(\log(1-t), \sqrt{t}, \frac{1-\cos t}{t}\right)$.

(f) $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\left(t^{\sqrt{t}}, \frac{\sin 4t}{t}, 5\right)$.

27. Derive:

(a) $\vec{r}(t) = (te^t, -\sin t\cos t, \sin t)$.

(b) $\vec{r}(t) = (t^t, -\sec t, (2-t)^a)$, em que $a > 0$.

(c) $\vec{r}(t) = (\operatorname{tg} t, 2^t t^2, 2)$.

28. Integre as seguintes funções vetoriais:

(a) $\vec{r}(t) = \sec(t)\vec{i} + \cos^2(3t)\vec{j} + 2^{-t^2+13}t\vec{k}$.

(b) $\vec{r}(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{9-t^2}}{t^2}\vec{j} + \vec{k}$.

(c) $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}\vec{j} + \dfrac{1}{t}\vec{k}$.

(d) $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + \ln t\vec{k}$.

29. Determine $\vec{r}(t)$, sabendo-se que $\vec{r}'(t) = t^2\vec{i} + 4t^3\vec{j} - t^2\vec{k}$ e $r(0) = \vec{j}$.

30. Reparametrize pelo comprimento de arco as seguintes curvas, sendo $t \in [0, 2\pi]$.

(a) $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a\sin t)$.

(b) $\vec{\alpha}(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$.

(c) $\vec{\alpha}(t) = (2-3t, 4t-1, t)$.

31. Seja C é uma curva cuja equação polar é dada por $r = F(\theta)$, com $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Determine o comprimento de arco de C.

32. Use o exercício anterior (31) para obter o comprimento de arco do cardióide $r = 2(1+\cos\theta)$. Lembre-se que $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$. Faça o mesmo para as curvas: $r = e^{\theta}$ com $\theta \in [\alpha, \beta]$; e $r = 6\sin^2\dfrac{\theta}{2}$, no intervalo $I = \left[\dfrac{\pi}{\pi}, \pi\right]$.

33. É possível que duas partículas que se movem sobre as curvas $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (7t-12)\vec{j} + t\vec{k}$ e $\vec{s}(t) = (5t-6)\vec{i} + t\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \geq 0$, colidirem? Justifique.

34. Sabe-se que a equação da reta tangente a uma curva $\vec{r}(t)$ em um ponto t_0 é dada por $X(t) = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)$. Determine a reta tangente às curvas abaixo nos pontos indicados.

    (a) $\vec{r}(t) = (3\sin t, 3\cos t, t), t = \dfrac{\pi}{2}$.

    (b) $\vec{r}(t) = (te^t, \ln(t^3+3), (2t^2)^{\frac{1}{3}})$, t = 1.

    (c) $\vec{r}(t) = (3t^2+1, 4^t, e^{t-1})$ no ponto $P(4,4,1)$.

35. Mostre que uma curva é reta se, e somente se, sua curvatura é nula.

36. Mostre que toda circunferência tem curvatura constante e torção nula.

37. Calcule os valores de t para os quais a curvatura da curva $\vec{r}(t) = (t, t^2, 1)$ seja máxima. O

38. A curva $r : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{r}(t) = \left(t, \dfrac{1+t^2}{t}, \dfrac{-1+t^2}{t}\right)$ é plana? Dica: Mostre que sua torção é nula.

39. Considere a curva $\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, 0)$, $a > b > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 2\pi[$.

    (a) Esboce o gráfico e determine sua curvatura;

    (b) Obtenha os valores de t para os quais a curvatura máxima e mínima. Justifique geometricamente.

40. Determine os vetores velocidade e aceleração, a aceleração escalar e as componentes normal e tangencial da aceleração, quando $t = \pi/2$, para uma partícula que se move ao longo da curva $\vec{\alpha}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$.

41. Mostre que se $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), 0)$ é uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco, então sua curvatura é dada por:

$$k(s) = \left|\det\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\right|.$$

    Utilize esta fórmula para obter a curvatura do círculo de raio a após reparametrização.

42. Determine a condição necessária (relativa a $f(t)$) de modo que a curva $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + f(t)\vec{k}$, $a > 0$, seja uma curva plana.

43. Determine a curvatura, torção, componentes normal e tangencial da aceleração para as seguintes curvas:

(a) $\vec{r} = \vec{r}(t) = (t^3, 3t + 2, 0)$.

(b) $\vec{r} = \vec{r}(t) = (\ln t, 0, \ln t)$, $t > 0$.

(c) $\vec{r} = \vec{r}(t) = (3t - t^2, 3t^2, 2t)$.

(d) $\vec{r} = \vec{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$.

44. Determine o Triedo de Frenet para a hélice circular $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + t\vec{k}$.

45. Determine o Triedo de Frenet e a equação dos planos normal e osculador:

   (a) da cúbica $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, se $t = 1$.

   (b) da curva $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + \dfrac{2}{3}t^3\vec{k}$, $t > 0$, no ponto (1, 0, 2/3).

46. Um rio tem 100 m de largura e corre para leste. Um barco a remo deixa a margem esquerda no instante $t = 0$. A pessoa que está no barco rema a 20 m/min na direção da margem direita. A velocidade do rio em (x, y) é $\vec{v} = (-\dfrac{1}{250}(y - 50)^2 + 10, 0, 0)$ n/min, $0 \leq y \leq 100$.

   (a) Mostre que o máximo da velociade do rio ocorre em seu centro.

   (b) Se $\vec{r}(0) = 100\vec{j}$ determine a posição do barco em t. (Observe que a velocidade do barco é a soma das velociades do remador e da correnteza. Observe também que é possível utilizar a condição inicial para escrevermos y em função do parâmetro t (tempo) e obtermos $\vec{v}(t)$. Assim, basta integrar e usar a condição inicial.

   (c) Ao descer o rio, a que distância o barco atingirá a margem direita?

47. Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior que a força exercida por outros astros, podemos ignorar todos os outros corpos, exceto o Sol, e um planeta girando em torno dele. Considere um sistema de coordenadas com o Sol em seu centro e seja $r = \vec{r}(t)$ a posição do planeta. Sejam $v = r'$, $a = v'$, m a massa do planeta, M a massa do Sol, F a força da gravidade sobre o planeta, G a constante de Gravitação, $\bar{r} = |r|$ e $u = \dfrac{r}{\bar{r}}$.

   Pela Segunda Lei de Newton, $F = ma$. Pela lei da Gravitação, $F = -\dfrac{GMm}{r^3}r$.

   (a) Igualando as duas expressões para F, verifique que os vetores a e r são paralelos e conclua que $a \times r = 0$.

   (b) Mostre que $\dfrac{d}{dt}(r \times v) = 0$ e conclua que $r \times v$ é um vetor constante. Denote tal vetor h e suponha $h \neq 0$, isto é, suponha que r não é paralelo a v.

   (c) Conclua dos itens anteriores que o planeta está em um plano contendo a origem e perpendicular a h, isto é, conclua que a órbita do planeta é uma curva plana.

Abaixo algumas respostas:

1a. $x + y = 1$.

1b. $x + y = 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1c. $x + y = 1$, $x \geqslant -1$.

1d. $y^2 = x^3$.

1e. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

1f. $y = 1 - x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2a. a reta paralela ao eixo-z passando pelo ponto $(2, 1, 0)$.

2b. segmento de reta que liga os pontos $(-1, -1, -1)$ e $(1, 1, 1)$.

2c. semicircunferência no plano $x = 3$ de centro $(3, 0, 0)$ e raio 1.

2d. semiparábola, no plano $y = 2$, com vértice no ponto $(-1, 2, 0)$.

3a. $\sigma(t) = (3t, -2 + 2t)$.

3b. $\sigma(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{4a}\right)$.

3c. $\sigma(t) = (a + \cos t, b \operatorname{sen} t)$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

3d. $\sigma(t) = (a + r\cos t, b + r \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3e. $\sigma(t) = (a \sec t, b \operatorname{tg} t)$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

4. $\sigma(\theta) = (a\cos(\theta), a \operatorname{sen}(\theta), b\theta)$.

5. $-x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}$.

8b. $x^2 - y^2 = 1$, $x \geqslant 1$.

9. $\dfrac{dy}{dt} = 2t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{1}{3t}$.

10. $\dfrac{dy}{dx} = 0$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{4a}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$.

13a. $\sqrt{1 + b^2 + c^2}$.

13b. $2\pi\sqrt{13}$.

13c. $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

13d. $\beta - \alpha$.

11. $\sigma(2) = (2, 0)$, $V(2) = (3, 12)$, $A(2) = (2, 26)$.

12a. $\sigma_1(t) = (\cos(20t + \theta_0), \operatorname{sen}(20t + \theta(0)))$, $\sigma_2(t) = \big(2\cos(20t^2 + \theta_0), 2\operatorname{sen}(20t^2 + \theta(0))\big)$.

12b. 1 hora.

12c. 80 km/h.

14. 20π.

15. 20π.

15a. $\sqrt{2}(e^2 - 1)$.

15b. $2\pi^2 a$.

15c. 50.

15d. $\sqrt{2}\ln(\sqrt{2} + 1)$.

16a. $A_T(t) = 1$, $A_N(t) = t$.

16b. $T\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$, $N\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0)$ e $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

17. $\rho(t) = \dfrac{\sqrt{2}(e^t + e^{-t})^2}{2}$.

19. $k(t) = \dfrac{2000}{(4 \times 10^4 \operatorname{sen}^2(t) + 100\cos^2(t))^{3/2}}$.

21a. $\sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)$.

21b. $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(\ln\left|\sqrt{1 + 5\pi^2} + \sqrt{5}\pi\right| + \sqrt{5}\pi\sqrt{1 + 5\pi^2}\right)$.

21c. 13.

21d. $\dfrac{3a}{2}$.

21e. $1/27(-13\sqrt{13} + 4(9 + 2^{2/3})^{3/2})$.

22a. $\vec{r} = t\vec{i} + e^t\vec{j} + te^t\vec{k}$.

22b. $\vec{r} = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j} + (1 - 2\cos t - 4\sin t)\vec{k}$.

22c. $\vec{r} = t\vec{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\vec{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1)\vec{k}$.

23a. $4x^2 - z^2 = 4$ no plano $y = 3$.

23b. $z = 4x^2 - 24x + 35$ no plano $y = 0$.

23c. $y = 6xz$.

23d. $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$ no plano $z = 19$.

24a. $\mathbb{R}_+^*$.

24b. $\{t \in \mathbb{R}/t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

24c. $\{t \in \mathbb{R}/t < -3 \text{ ou } t > 3\}$.

24d. $\{t \in \mathbb{R}/0 < t \leq 1\}$.

26a. $(0, 2, 3)$.

26b. $(\ln a - \ln b, e^5, 1/2)$.

26c. $(\sqrt{3}/2, -2, 1)$.

26d. $(0, -1, \sqrt{3}/6)$.

26e. $(0, 0, 0)$.

26f. $(1, 4, 5)$.

28a. $\ln|\sec t + \operatorname{tg} t|\vec{i} + \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(6t)}{6}\right)\vec{j} - \frac{2^{-t^2+12}}{2\ln 2}\vec{k} + \vec{C}$.

28b.

28c.

28d.

30a. $\vec{\alpha}(s) = \left(a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a}\right)$, $s \in [0, 2a\pi]$.

30b.

30c.

30. $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}d\theta$.

32. 16. $\sqrt{2}(e^\beta - e^\alpha)$. $6\sqrt{2}$.

34a. $X(t) = (3, 0, \frac{\pi}{2}) + t(0, -3, 1)$.

34b.

34c. $X(t) = (4 + 6t, 4 + 4\ln(4t), 1 + t)$.

37. $t = 0$, $k(0) = 2$.

39a. Elipse no plano xy; $k(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$.

39b. Máx: $\{0, \pi\}$ e Min: $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

40. Velocidade: $(\frac{-\pi}{2}, 1, 1)$; aceleração: $(-2, \frac{-\pi}{2}, 0)$; aceleração escalar: $\frac{\sqrt{16+\pi^2}}{2}$; $a_T = \frac{\pi}{\sqrt{8+\pi^2}}$; $a_N = \frac{\sqrt{\pi^4 + 20\pi^2 + 96}}{8\sqrt{8+\pi^2}}$.

41. $k(s) = \frac{1}{a}$.

42. $f(t) = k_1\sin t + k_2\cos t + k_3$, com k_i constantes.

43a. $k(t) = \frac{6}{(9+4t^2)^{3/2}}$; $\tau(t) = 0$; $a_N(t)\frac{6}{(9+4t^2)^{1/2}}$; $a_N(t)\frac{4t}{(9+4t^2)^{1/2}}$

43b. $k(t) = a_N(t) = \tau(t) = 0$; $a_T(t) = -\sqrt{2}t^{-2}$.

43c.

43d.

44. $\vec{t} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}(-a\sin t, a\cos t, 1)$; $\vec{n} = (-\cos t, -\sin t, 0)$; $\vec{b} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}(\sin t, -\cos t, a)$.

45a.

45b. $\vec{t}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$; $\vec{n}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$; $\vec{b}(1) = (0,0,1)$; $\pi_N : x + z = \dfrac{5}{3}$; $\pi_O : x = 0$

46a.

46b. $\vec{r}(t) = (-\dfrac{8}{15}t^3 + 4t^2, 100 - 20t, 0)$.

46c. 100/3 m.