Probabilidade - aula III

Erica Castilho Rodrigues

16 de Maio de 2017

Regra da Probabilidade Total

Independência

Teorema de Bayes

Objetivos

Ao final deste capítulo você deve ser capaz de:

- Usar a regra da multiplicação para calcular probabilidade de eventos
- Usar a Regra da Probabilidade Total.

Regra da Multiplicação

- Frequentemente precisamos da probabilidade da interseção de dois eventos.
- A definição da probabilidade condicional

$$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$$

pode ser reescrita e resultar na regra conhecida como regra da multiplicação.

Regra da Multiplicação

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

Exemplo:

- A probabilidade de que o primeiro estágio de uma operação de usinagem atenda às especificações é de 0,90.
- Falhas ocorrem devido a: variações no metal, condição da lâmina, etc.
- Dado que o primeiro estágio atende as especificações, a probabilidade de que o segundo estágio atenda é de 0,95.
- Qual a probabilidade de ambos encontrarem as especificações?

Solução:

- Definimos os eventos:

$$A = \{\text{o primeiro estágio atende as especificações}\}$$

$$B = \{\text{o segundo estágio atende as especificações}\}$$

- A probabilidade requerida é

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = (0,95)(0,90)\ .$$

- **Observação:** Apesar de ser também verdade que $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ a informação dada no problema não nos permite usar essa fórmula.

Regra da Probabilidade Total

- A probabilidade de um evento pode ser dada sob várias condições.
- A partir dessa informação podemos recuperar a probabilidade do evento.
- Esse resultado é conhecido como regra da probabilidade total.

Exemplo:

- Considere um processo de fabricação de semicondutores.
- Dado que um *chip* está sujeito a altos níveis de contaminação, a probabilidade de que ele cause defeito na produção é de 0,1.
- Dado que o *chip* não está sujeito a altos níveis de contaminação, a probabilidade dele causar defeito na produção é 0,005.
- Sabemos ainda que a probabilidade de um *chip* estar sob altos níveis de contaminação é 0,2.
- Estamos interessados no evento: o *chip* causa uma falha na produção.
- As condições a que esse evento está sujeito são:
  - está sujeito a altos níveis de contaminação;
  - não está sujeito a altos níveis de contaminação.

- Para qualquer evento B podemos escrever

$$B = (B \cap A') \cup (B \cap A) \, .$$

- Como $(B \cap A')$ e $(B \cap A)$ são mutuamente excludentes

$$P(B) = P(B \cap A') + P(B \cap A) = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A') \, .$$

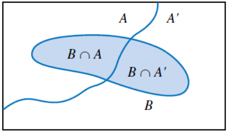


Figure 2-14 Partitioning an event into two mutually exclusive subsets.

Exemplo:

- Considere o exemplo de contaminação discutido anteriormente.
- Seja

$$F = \{\text{o } \textit{chip} \text{ causa defeito na produção}\}$$

$$H = \{\text{o } \textit{chip} \text{ está sujeito a altos níveis de contaminação}\}$$

- Temos que

$$P(F|H) = 0,10 \qquad P(F|H') = 0,005 \qquad P(H) = 0,2\,.$$

- Logo

$$P(F) = P(F|H)P(H) + P(F|H')P(H')$$

$$= (0,10)(0,2) + (0,005)(0,8) = 0,0235.$$

- Uma coleção de eventos $E_1, \ldots, E_n$ é dita exaustiva e mutuamente excludente se

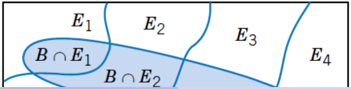
$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = S \quad \text{e} \quad E_i \cap E_j = \emptyset\,.$$

Regra da Probabilidade Total

Se $E_1, \ldots, E_n$ é uma coleção exaustiva e mutuamente excludentes de eventos

$$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + \cdots + P(B \cap E_n)$$

$$= P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + \cdots + P(B|E_n)P(E_n)\,.$$



Exemplo:

- Considere o exemplo de contaminação.
- Porém agora o chip pode estar sujeito a níveis de contaminação: alto, médio e baixo.
- Seja

$$F = \{\text{o } \textit{chip} \text{ causa defeito na produção}\}$$

$$H = \{\text{o } \textit{chip} \text{ está sujeito a altos níveis de contaminação}\}$$

$$M = \{\text{o } \textit{chip} \text{ está sujeito níveis médios de contaminação}\}$$

$$L = \{\text{o } \textit{chip} \text{ está sujeito níveis baixos de contaminação}\}$$

- Qual a probabilidade do *chip* causar defeito na produção?

Exemplo: (solução)

- Temos que

$$P(F|H) = 0,10 \qquad P(F|M) = 0,01, \qquad P(F|L) = 0,001$$

$$P(H) = 0,2 \qquad P(M) = 0,3 \qquad P(L) = 0,5 \,.$$

- Logo

$$P(F) = P(F|H)P(H) + P(F|M)P(M) + P(F|L)P(L)$$

$$= (0,10)(0,2) + (0,01)(0,3) + (0,001)(0,5) = 0,0235.$$

Exercício:

- Determinado veículo pode ter problemas mecânicos ou elétricos. Se ele tiver problemas mecânicos, não para, mas se tiver problema elétrico tem de parar imediatamente. A chance de esse veículo ter problemas mecânicos é de 0,2. Já a chance do mesmo veículo ter problemas elétricos é de 0,15 se não houve problema mecânico precedente, e de 0,25 se houve problema mecânico precedente. Agora, calcule:
- Qual é a probabilidade de o veículo parar em determinado dia?
  - a) 0,2
  - b) 0,17
  - c) 0,15
  - d) 0,35

Independência

- Em alguns casos podemos ter que

$$P(A|B) = P(A) \, .$$

- O conhecimento de B não nos diz nada sobre A.
- Temos assim que

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B) \, .$$

- Além disso

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \, .$$

- Dizemos assim que A e B são independentes.

Independência

Dois eventos A e B são independentes se uma das seguintes afirmações é verdade

- $P(A|B) = P(A)$;
- $P(B|A) = P(B)$;
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Observação: se A e B são independentes A' e B' também são. (Fazer como exercício.)

Exemplo:

- Considere o circuito abaixo.

- Ele só opera se houver um caminho de dispositivos funcionando da esquerda para direita.
- A probabilidade de cada dispositivo funcionar é mostrada na figura.
- Suponha que os disposistivos falhem independentemente.
- Qual a probabilidade do circuito operar?

Solução:

- Definimos os eventos:

$$E = \{\text{o dispositivo da esquerda opera}\}$$

$$D = \{\text{o dispositivo da direito opera}\}$$

- A propabilidade do circuito operar é

$$P(E \cap D) = P(E)P(D) = (0,95)(0,95) = 0,9025\,.$$

Independência coletiva

Os eventos $E_1, \ldots, E_n$ são mutuamente independentes se para qualquer subconjunto de eventos $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}$

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2}) \ldots P(E_{i_k})$$

Exemplo:

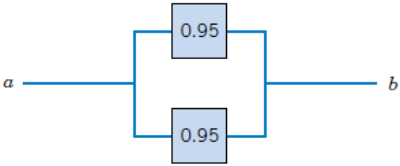
- Considere que a probabilidade de uma pastilha conter uma grande partícula de contaminação é 0,01.
- Suponha que as pastilhas são independentes:
  - a probabilidade de uma pastilha cotem uma partícula de contaminação não é influenciada pelas demais.
- 15 pastilhas são analisadas.
- Qual a probabilidade de nenhuma pastilha ser contaminada?
- Defina o evento:

$$E_i = \{\text{a i-ésima particula } \textbf{não} \text{ é contaminada}\}, \;\; P(E_i) = 0,99$$

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2 \dots E_n) &= P(E_1)P(E_2)\dots P(E_n) \\ &= (0,99)^{15} = 0,86 \end{aligned}$$

Exemplo:

- Considere o circuito apresentado a seguir.



- Ele só opera se houver um caminho de dispositivos funcionando da esquerda para direita.
- A probabilidade de cada dispositivo funcionar é mostrada na figura.
- Suponha que os dois falhem independentemente.
- Qual a probabilidade do circuito operar?

Solução:

- Definimos os eventos:

$$S = \{\text{o dispositivo da parte superior opera}\}$$

$$I = \{\text{o dispositivo da parte inferior opera}\}$$

- Haverá um caminho disponível se pelo menos um deles operar.
- A probabilidade do circuito operar é

$$P(S \cup I) = 1 - P[(S \cup I)'] = 1 - P[S' \cap I']$$

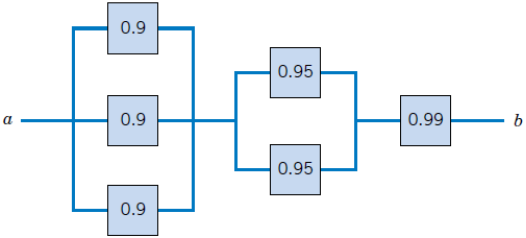
- Como S e I são independentes, S' e I' também são, logo

$$P(S' \cap I') = P(S')P(I') = (0,05)^2$$

portanto

$$P(S \cup I) = 1 - (0,05)^2 = 0,9975\,.$$

- Considere o circuito abaixo.



- Ele só opera se houver um caminho de dispositivos funcionando da esquerda para direita.
- Suponha que os dispositivos são independentes.
- Qual a probabilidade do circuito funcionar? (Fazer no quadro)

Exemplo: (resolução)

- Seja E_i o i-ésimo cirquito opera.
- Probabilidade do primeiro operar

$$P(E_1) = 1 - (0,1)^3 = 0,999\,.$$

- Probabilidade do segundo operar

$$P(E_2) = 1 - (0,05)^2 = 0,9998\,.$$

- Probabilidade do terceiro operar

$$P(E_3) = 0,99$$

- Probabilidade dos três operarem

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = (0,999)(0,9998)(0,99) =$$

Teorema de Bayes

- Vimos que a informação muitas vezes é apresentada em forma de probabilidade condicional.
- Elas nos fornecem a probabilidade de um evento (uma falha) dada uma condição (estar contaminado).
- Pode ser que estejamos interessados em investigar:
  - depois que o evento deu um resultado (falhar);
  - qual a probabilidade de uma certa condição estar presente (alta contaminação)?
- Esse tipo de problema é tratado usando o importante resultado conhecido como **Teorema de Bayes**.

- Da definição de probabilidade condicional sabemos que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(B|A) \, .$$

- Rearranjando a última igualdade temos o seguinte resultado.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \quad \text{para } P(B) > 0 \, .$$

Exemplo:

- Reconsidere o exemplo do *chip*.
- Qual a probabilidade de que um nível alto de contaminação estava presente dado que uma falha ocorreu?
- Relembrando que

$$H = \{\text{ocorre um nível alto de contaminação}\}$$

$$F = \{\text{ocorre uma falha}\}$$

- Vimos que

$$P(F) = P(F|H)P(H) + P(F|H')P(H') = 0,0235\,.$$

- Temos então que

$$P(H|F) = \frac{P(F|H)P(H)}{P(F)} = \frac{(0,10)(0,20)}{(0,0235)} = 0,85\,.$$

- Podemos sempre usar a Regra da probabilidade total para calcular a probabilidade do denominador.
- Temos então o seguinte resultado geral.

Teorema de Bayes

Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_k$ eventos mutuamente excludentes e exaustivos. Seja B um evento qualquer com $P(B) > 0$ temos então que

$$P(E_i|B) = \frac{P(B|E_i)P(E_i)}{P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + \cdots + P(B|E_n)P(E_n)}$$

Exemplo:

- Queremos identificar a doença de um paciente com base em seus sintomas.
- O paciente apresenta-se desanimado, com dor de cabeça e febre.

  - O médico afirma que ele pode ter alguma das seguintes doenças:

$$T = \{\text{febre tifóide}\} \qquad D = \{\text{dengue}\}$$

$$R = \{\text{resfriado}\} \qquad O = \{\text{outros}\}$$

Exemplo: (continuação)

- O médico sabe de estudos anteriores que:
  - dos pacientes com febre tifóide, 85% apresentam os sintomas relatados pelo paciente;
  - dentre os pacientes com dengue, 80% apresentam os sintomas;
  - dentre os com resfriado, 30% apresentam os sintomas;
  - dentre aqueles com outras enfermidades, 1,5% apresentam os sintomas.
- Sabe-se ainda que na população a prevalência das doenças são:
  - febre tifóide $\Rightarrow$ 1%;
  - dengue $\Rightarrow$ 8%;
  - resfriado $\Rightarrow$ 30%;
  - outros $\Rightarrow$ 61%.

Exemplo: (continuação)

- Um paciente chega no hospital com sintomas relatados.
- Qual a probabilidade dele ter febre tifóide?
- Doenças que ele pode ter $\Rightarrow$ T, D, R, O.
- Dados $\Rightarrow$ sintomas do indivíduo.
- Nossa crença inicial é de que a probabilidade do paciente ter a doença é 1%.
- Como muda essa crença após observarmos os sintomas?

Exemplo: (continuação)

- Seja

$$S = \{\text{o paciente tem os sintomas.}\}$$

- A nossa distribuição a *priori* é

$$P(T) = 0,01 \quad P(D) = 0,08 \quad P(R) = 0,3 \quad P(O) = 0,61\ .$$

- A nossa função de verossimilhança é

$$P(S|T) = 0,85 \quad P(S|D) = 0,8 \quad P(S|R) = 0,3$$

$$P(S|O) = 0,016$$

- A probabilidade de ter a a doença?

Exemplo: (continuação)

$$P(T|S) = \frac{P(S|T)P(T)}{P(S|T)P(T) + P(S|D)P(D) + P(S|R)P(R) + P(S|O)P(O)}$$

$$= \frac{(0,85)(0,01)}{(0,85)(0,01) + (0,8)(0,08) + (0,3)(0,3) + (0,015)(0,61)} = 0,04$$

Exemplo: (continuação)

- A nossa crença inicial era que com 1% de probabilidade o paciente tinha febre tifóide.
- Após observarmos os sintomas essa probabilidade para para 4,9%.
- Temos ainda que

$$P(D|S) = 0,3728 \qquad P(R|S) = 0,5243$$

$$P(O|S) = 0,0533 \,.$$

- Se um paciente aparece com esses sintomas, a maior probabilidade é de resfriado.
- Os sintomas são genéricos e resfriado é a doença mais comum.
- A nossa crença a *priori* de que ele tem resfriado é alta 30%.
- Depois de observar os sintomas, fica ainda maior.

Exemplo:

- Queremos identificar se um e-mail é *spam* ou não.
- "Parâmetro" $\Rightarrow$ classificação do e-mail como spam ou não.
- Dados $\Rightarrow$ texto do email.

Exemplo: (continuação)

- Temos uma base de dados com 100 emails.
- 60 deles são spam e desses 60:
  - 48 tem a palavra *buy*;
  - 12 não tem.
- 40 não são spam e desses 40:
  - 4 tem a palavra *buy*;
  - 36 não tem.

Exemplo: (continuação)

- A frequência da paralvra *buy* é maior entre os que são spam!
- Eu recebi um e-mail e ele contém a palavra *buy*, qual a probabilidade de ser um spam?
- Defina os eventos

$$S = \{\text{o e-mail é spam}\}$$

$$B = \{\text{o e-mail tem a palavra buy.}\}$$

- Qual $P(S)$?

$$P(S) = \frac{60}{100}$$

- Qual $P(B)$?

$$P(B) = \frac{48 + 4}{100}$$

Exemplo: (continuação)

- Qual $P(B \cap S)$?

$$P(B \cap S) = \frac{48}{100}\ .$$

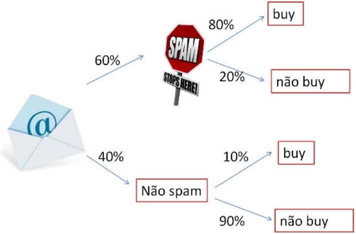
- Qual a probabilidade de um e-mail ser spam, dado que ele tem a palavra *buy*?

$$P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{48/100}{52/100} = \frac{48}{52}$$

- Vejamos o problema novamente agora usando probabilidades ao invés de quantidades.

Exemplo:


60%
SPAM
STOPS HERE!
40%
Não spam


60%
SPAM
STOPS HERE!
80%
buy
20%
não buy
40%
Não spam
10%
buy
90%
não buy

Exemplo: (continuação)

- Qual a probabilidade de um e-mail ser spam, dado que ele tem a palavra *buy*?
- Lembre que

$$S = \{\text{o e-mail é spam}\}$$

$$B = \{\text{o e-mail tem a palavra buy.}\}$$

- Qual $P(S)$? $P(S) = 0,6$
- Qual $P(B|S)$? $P(B|S) = 0,8$
- Qual $P(B|S^c)$? $P(B|S^c) = 0,1$.
- A probabilidade requerida é

$$P(S|B) = \frac{P(B|S)P(S)}{P(B|S)P(S) + P(B|S^c)P(S^c)}$$

$$\frac{(0,8)(0,6)}{(0,8)(0,6) + (0,1)(0,4)} = 0,92$$

Exemplo: (continuação)

- Antes de observarmos o conteúdo do e-mail, nossa crença a *priori* dizia que probabilidade de ser spam é 60%.
- Lemos o e-mail e notamos que ele tem a palabra buy.
- A nossa incerteza é atualizada.
- A probabilidade de ser spam passa de 60% para 92%.
- A presença da palavra buy é um forte indício de que o e-mail é spam.
- Essa detecção é feita automaticamente, levando outros fatores em conta.
- Esse método é chamado **Naive Bayes**.

Exemplo:

- Vejamos outra aplicação da técnica de Naive Bayes.
- Queremos tentar prever se o consumidor vai comprar ou não um computador.

- Essa inferência é feita com base em suas características:
  - idade;
  - salário;
  - se é estudante ou não;
  - disponibilidade de crédito.

Exemplo: (continuação)

- Foram registrados os dados de 14 consumidores anteriores e os dados são mostrados a seguir.

RID	age	income	student	credit	C_i: buy
1	youth	high	no	fair	C_2: no
2	youth	high	no	excellent	C_2: no
3	middle-aged	high	no	fair	C_1: yes
4	senior	medium	no	fair	C_1: yes
5	senior	low	yes	fair	C_1: yes
6	senior	low	yes	excellent	C_2: no
7	middle-aged	low	yes	excellent	C_1: yes
8	youth	medium	no	fair	C_2: no
9	youth	low	yes	fair	C_1: yes
10	senior	medium	yes	fair	C_1: yes
11	youth	medium	yes	excellent	C_1: yes
12	middle-aged	medium	no	excellent	C_1: yes
13	middle-aged	high	yes	fair	C_1: yes
14	senior	medium	no	excellent	C_2: no

Exemplo: (continuação)

- Selecionamos um consumidor ao acaso.
- Ele tem as sequintes características:
  - idade: jovem;
  - salário: médio;
  - estudante: sim;
  - crédito: justo.
- Queremos saber se ele irá comprar ou não o computador.
- Seja

$$C_i = \{\text{o consumidor compra o computador}\} .$$

- A partir dos dados, temos que, *a priori*,

$$P(C_i) = P(\text{comprar=sim}) = \frac{9}{14}$$

$$P(C_i^c) = P(\text{comprar=não}) = \frac{5}{14} .$$

Exemplo: (continuação)

- Estamos interessados em

  $P(C_i|$ idade=jovem; salário=médio; estudante=sim; crédito=justo$)$

- Vamos denotar

  $X =$ {idade=jovem; salário=médio; estudante=sim; crédito=justo}.

- Essa probabilidade é dada por

$$P(C_i|X) = \frac{P(X|C_i)P(C_i)}{P(X)}.$$

Exemplo: (continuação)

- Consideramos que, dado C_i, as características são indenpendetes entre si

$$P(X|C_i) = P(\text{idade=jovem}|C_i)P(\text{salário=médio}|C_i)$$
$$P(\text{estudante=sim}|C_i)P(\text{crédito=justo}|C_i)\ .$$

- A partir dos dados notamos que

$$P(\text{idade=jovem}|C_i) = \frac{\#\text{ jovens dentre os que compraram}}{\#\text{ compradores}} = \frac{2}{9}$$

$$P(\text{salário=médio}|(C_i) = \frac{\#\text{ salário médio dentre os que compraram}}{\#\text{ compradores}} = \frac{4}{9}$$

$$P(\text{estudante=sim}|C_i) = \frac{\#\text{ estudantes dentre os que compraram}}{\#\text{ compradores}} = \frac{6}{9}$$

$$P(\text{crédito=justo}|C_i) = \frac{\#\text{ crédito justo dentre os que compraram}}{\#\text{ compradores}} = \frac{6}{9}.$$

Exemplo: (continuação) Observação:

- Queremos verificar se

$$P(C_i|X) > P(C_i^c|X) \quad \text{ou} \quad P(C_i|X) < P(C_i^c|X)\,.$$

- E temos que

$$P(C_i|X) = \frac{P(X|C_i)P(C_i)}{P(X)} \quad P(C_i^c|X) = \frac{P(X|C_i^c)P(C_i^c)}{P(X)}\,.$$

- Os denominadores são iguais.
- Basta compararmos os numeradores.
- Queremos saber se

$$P(C_i)P(X|C_i) > P(C_i^c)P(X|C_i^c) \quad \text{ou}$$
$$P(C_i)P(X|C_i) < P(C_i^c)P(X|C_i^c)\,.$$

- Pois

$$P(C_i|X) \propto P(C_i)P(X|C_i)$$

Exemplo: (continuação)

- Temos então que

$$P(C_i|X) \propto P(C_i)P(\text{idade=jovem}|C_i)P(\text{salário=médio}|C_i)$$

$$\times P(\text{estudante=sim}|C_i)P(\text{crédito=justo}|C_i)\ .$$

- Usandoo os valores calculados temos que

$$P(C_i|X) \propto \frac{9}{14}\frac{2}{9}\frac{4}{9}\frac{6}{9}\frac{6}{9} = 0,028\ .$$

- De forma análoga podemos ver que

$$P(C_i^c|X) \propto \frac{5}{14}\frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{1}{5}\frac{2}{5} = 0,007\ .$$

Exemplo: (continuação)

- Você acha que o consumidor vai comprar ou não o computador?
- Sim, pois

$$P(C_i|X) > P(C_i^c|X) \,.$$

- A *priori*, tínhamos que

$$P(C_i) = \frac{9}{14} \quad P(C_i^c) = \frac{5}{14} \,.$$

- Se não soubéssemes nada sobre o cliente diríamos que ele compraria.

Exemplo: (continuação)

- Após observarmos os dados temos mais certeza ainda pois
$$\frac{P(C_i)}{P(C_i^c)} = \frac{9}{5} = 1.8$$
$$\frac{P(C_i|X)}{P(C_i^c|X)} = \frac{0,028}{0,007} = 4\,.$$

- Depois de observarmos suas características, a probabilidade dele comprar é ainda maior.

Exercício:

- Determinado veículo pode ter problemas mecânicos ou elétricos. Se ele tiver problemas mecânicos, não para, mas se tiver problema elétrico tem de parar imediatamente. A chance de esse veículo ter problemas mecânicos é de 0,2. Já a chance do mesmo veículo ter problemas elétricos é de 0,15 se não houve problema mecânico precedente, e de 0,25 se houve problema mecânico precedente. Agora, calcule:
- Se o veículo parou em certo dia, qual a chance de que tenha havido defeito mecânico?
  - a) 0,25
  - b) 0,20
  - c) 0,29
  - d) 0,15

Variáveis Aleatórias

- Frequentemente estamos interessados em resumir o resultado de um experimento aleatório através de um número.
- Em muitos casos, o espaço amostral é apenas uma descrição dos resultados possíveis.
- Em outros, é necessário associar um número com cada resultado do espaço amostral.
- Exemplo: lançamos três moedas e observamos o número de caras que aparecem.

- Não sabemos de ante-mão qual o resultado do experimento aleatório.
- Portanto o valor da variável resultante também não é conhecido.
- Por isso uma variável que associa um número ao resultado do experimento aleatório é conhecida como **variável aleatória**.

Variável Aleatória

Função que confere um número real a cada resultado no espaço amostral de um experimento aleatório.

- Precisamos de uma notação para distinguir variável aleatória de número real.
- Uma variável aleatória é denotada por letra maiúscula, tal como X.
- Depois do experimento ser conduzido, o valor observado da variável aleatória é denotado por letra minúscula, tal como $x = 70$ miliampéres.

- Algumas medidas podem assumir qualquer valor em um intervalo de números reais.
- Exemplo: o comprimento de uma peça pode assumir qualquer valor positivo.
- Na prática, porém, arredondamos a medida para o centésimo ou décimo mais próximo.
- Mas vamos considerar que pode assumir qualquer valor.
- Esse tipo de variável é denominada **contínua**.

- Em alguns casos podemos registrar variáveis que são apenas pontos discretos na reta.
- Exemplo: o número de bits que são transmitidos e recebidos com erro.
- Ou ainda a proporção de bits transmitidos recebidos com erro, essa medida ainda é limitada a pontos discretos na reta real.
- Nesse tipo de situação dizemos que a variável aleatória é **discreta**.

Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas

- **Discreta:** possui uma faixa finita (ou infinita contável) de valores.
- **Contínua:** possui um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais para sua faixa.

- Em alguns casos a variável X é discreta, mas como sua faixa de valores é muito grande assumimos que é contínua.
- Suponha que medidas de corrente sejam lidas a partir de um instrumento com precisão de centésimos.
- Como as medidas são limitadas, a variável é discreta.
- Porém, por conveniência e simplicidade, podemos assumir que a variável é contínua.

Exemplos de Variáveis Aleatórias

- Discretas:
  - número de arranhões em uma superfície;
  - proporção de parte defeituosas em 1000 resultados;
  - número de bits transmitidos e recebidos com erro.
- Contínuas:
  - corrente elétrica;
  - comprimento;
  - pressão;
  - temperatura.