

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**Geometria Analítica e Álgebra Linear – GAAL**  
**Matrizes Ortogonais, Mudança de Coordenadas e Cônicas**  
**Lista de Exercícios 1**

1. Encontre uma matriz ortogonal  $P$  cuja primeira linha é  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ . É possível encontrar uma matriz ortogonal cuja primeira linha é  $(1, 2, 2)$ ?
2. Encontre uma matriz ortogonal simétrica  $P$  cuja primeira linha é  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .
3. Se  $P$  é uma matriz ortogonal, mostre que  $\det P = \pm 1$ .
4. Que condições devem satisfazer  $a$  e  $b$  para que a matriz

$$\begin{bmatrix} a+b & b-a \\ a-b & a+b \end{bmatrix}$$

seja ortogonal?

5. Mostre que qualquer matriz ortogonal  $2 \times 2$  tem uma das duas formas seguintes, para algum valor de  $\theta$ :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

6. Seja  $A$  uma matriz ortogonal  $3 \times 3$ . Mostre que para qualquer  $v \in \mathbb{R}^3$  temos  $\|Av\| = \|v\|$ .
7. Sabemos que se  $B$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$  formada pelos vetores  $U, V$  e  $W$ , então as leis de mudança de base entre a base usual e a base  $B$  são

$$P_B = [U, V, W]^{-1}P \quad \text{e} \quad P = [U, V, W]P_B$$

Determine a lei de mudança de base entre a base  $B$  e uma base  $B'$  distinta da usual.

8. Considere o círculo  $C$  de raio 1 e centrado na origem do sistema usual de coordenadas do  $\mathbb{R}^2$ . Lembre-se que a equação de  $C$  é  $x^2 + y^2 = 1$ . Considere o sistema  $\{Q, i, j\}$ , onde  $Q = (-3, 2)$ . Ache a equação de  $C$  no novo sistema de coordenadas.
9. Considere a reta  $r = \{(x, y) : 2x - 3y = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $B$  a base formada pelos vetores  $(3, 2)$  e  $(1, 0)$  e  $x'$  e  $y'$  coordenadas definidas em  $\mathbb{R}^2$  pela origem usual e pela base  $B$ . Ache a equação de  $r$  nas coordenadas  $x'$  e  $y'$ .

10. Identifique as seguintes cônicas:

(a)  $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 6x + 9y - 4 = 0$

(b)  $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y + 15 = 0$

(c)  $49x^2 - 42xy + 9y^2 + 56x - 24y + 16 = 0$

(d)  $16x^2 + 16y^2 - 16x + 8y - 59 = 0$

(e)  $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x - 30y + 23 = 0$

(f)  $7x^2 + 6xy - y^2 - 2x + 10y - 9 = 0$

## Respostas

1.  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ; não.

2.  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ .