Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Geometria Analítica e Álgebra Linear – GAAL
ESPAÇOS EUCLIDIANOS – Lista de Exercícios 1

1. Considere o subconjunto de vetores $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$.

   a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$.

   b) Encontre a matriz de mudança de coordenadas A da base canônica $\{i,j,k\}$ de $\mathbb{R}^3$ para a base $\mathcal{B}$. Qual é matriz de mudança de coordenadas A' da base $\mathcal{B}$ para a base canônica?

   c) Quais são as coordenadas dos vetores canônicos i, j e k em relação à base $\mathcal{B}$?

   d) Se o ponto P tem coordenadas $(1,-2,5)$ no sistema $\{O,i,j,k\}$, quais são as coordenadas de P no sistema $\{O,\mathcal{B}\}$?

2. Considere o subconjunto de vetores $\mathcal{B} = \{(1,1,-2),(1,-1,0),(1,1,1)\}$.

   a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$.

   b) Encontre a matriz de mudança de coordenadas A da base canônica $\{i,j,k\}$ de $\mathbb{R}^3$ para a base $\mathcal{B}$. Qual é matriz de mudança de coordenadas A' da base $\mathcal{B}$ para a base canônica?

   c) Quais são as coordenadas dos vetores canônicos i, j e k em relação à base $\mathcal{B}$?

   d) Se o ponto P tem coordenadas $(1,-2,5)$ no sistema $\{O,i,j,k\}$, quais são as coordenadas de P no sistema $\{O,\mathcal{B}\}$?

3. Considere o subespaço $\mathcal{Z}$ gerado pelos vetores $(1,2,-1,3)$, $(3,0,1,-2)$, $(1,-4,3,-8)$ e $(5,-8,7,-18)$.

   a) $\mathcal{Z}$ é subespaço de qual espaço Euclidiano?

   b) Encontre uma base para $\mathcal{Z}$.

   c) Qual é a dimensão de $\mathcal{Z}$?

   d) Encontre uma base ortonormal para $\mathcal{Z}$.

4. Encontre uma base ortonormal $\mathcal{B}$ para o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,1,0,1)$, $v_2 = (1,0,0,-1,1)$, $v_3 = (3,1,1,-2,3)$ e $v_4 = (0,2,1,1,-1)$. Qual é a dimensão de $\mathcal{W}$?

5. Os vetores $(1,1,0,-1),(1,2,1,3),(1,1,-9,2),(16,-13,1,3)$ formam uma base para $\mathbb{R}^4$?

6. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{U} = \{(a,b,c,d) : b+c+d=0\},$$
$$\mathcal{W} = \{(a,b,c,d) : a+b=0, c=2d\}.$$

   a) Estes subconjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$? Justifique.

   b) Encontre uma base e a dimensão de $\mathcal{U}$.

   c) Encontre uma base e a dimensão de $\mathcal{W}$.

   d) $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$? Se for, encontre uma base e a dimensão de $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$.

Respostas

1. **a)** Pois $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$. **b)** $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $A = (A')^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. **c)** São as colunas de A, respectivamente: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **d)** $(-3, 1, 4)$.

2. **a)** Como eles são ortogonais dois a dois e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, eles são L.I. **b)** $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A = (A')^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. **c)** São as colunas de A, respectivamente: $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ e $\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$. **d)** $\left(-\frac{11}{6}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$.

3. **a)** $\mathbb{R}^4$. **b)** $\{(1, 2, -1, 3), (3, 0, 1, -2)\}$. **c)** 2. **d)** $\left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1, 2, -1, 3), \frac{1}{\sqrt{2910}}(49, 8, 11, -18)\right\}$.

4. $\mathcal{B} = \{\frac{1}{2}(1, 1, 1, 0, 1), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, -1, -1, -2, 1), \frac{1}{2\sqrt{6}}(1, 3, -1, -2, -3)\}$; $\dim \mathcal{W} = 3$.

5. Sim, porque são 4 vetores ortogonais, logo L.I., e $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

6. **b)** $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$; $\dim \mathcal{U} = 3$. **c)** $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}$; $\dim \mathcal{W} = 2$. **d)** $\mathcal{B}_{\mathcal{U}\cap\mathcal{W}} = \{(3, -3, 2, 1)\}$; $\dim \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = 1$.