Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Geometria Analítica e Álgebra Linear – GAAL
ESPAÇOS EUCLIDIANOS – Lista de Exercícios 2

1. Sejam $V = (1, 0, -1, 2)$ e $U = (1, 0, a, 0)$. Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o conjunto

$$\{X \in \mathbb{R}^4 : X \cdot V = U \cdot V\}$$

seja um subespaço do $\mathbb{R}^4$ e calcule sua dimensão.

2. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que o seguinte subespaço de R^3 tenha dimensão 1.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ para algum vetor } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

3. Considere a equação matricial:

$$AB = \bar{0},$$

sendo a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times4}$ e a matriz $B \in \mathbb{R}^{4\times2}$ dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Mostre que os vetores que formam as linhas da matriz A são perpendiculares aos vetores que formam as colunas da matriz B.
   (b) Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado pelos vetores-coluna da matriz B.
   (c) Encontre uma base ortonormal para o subespaço gerado pelos vetores-linha da matriz A.
   (d) Encontre uma base ortonormal para o espaço $\mathbb{R}^4$ tal que dois vetores dessa base pertençam ao subespaço gerado pelos vetores-coluna de B e dois vetores pertençam ao subespaço gerado pelos vetores-linha de A.
   (e) Se V é a matriz cujas linhas são os vetores da base ortonormal do espaço formado pelas linhas da matriz A e W é a matriz cujas colunas são os vetores da base ortonormal do espaço formado pelas colunas da matriz B, calcule VW.

4. Considere os subespaços Γ e Λ, sendo Γ dado pela solução do sistema homogêneo $AX = 0$, com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e Λ o subespaço cuja base é formada pelos vetores

$$v_1 = (2, 1, -1, 1),$$
$$v_2 = (2, 2, 1, 1),$$
$$v_3 = (0, 1, 1, 0).$$

Encontre bases ortonormais para os subespaços:

(a) Φ, que é a interseção entre os subespaços Γ e Λ;

(b) Υ, que contém a união dos subespaços Γ e Λ.

5. Considere a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine o subespaço $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^3$ definido da seguinte forma: se o vetor x pertence a $\mathcal{X}$, então o vetor $z = Ax$ também pertence a $\mathcal{X}$.

6. Seja $S_0 = \{O, i, j\}$ o sistema usual, que define coordenadas (x, y) para $\mathbb{R}^2$.

(a) Seja β a base obtida de $\{i, j\}$ por uma rotação de 60^o no sentido anti-horário. Sejam (x', y') coordenadas definidas pelo sistema $S = \{O, \beta\}$. Determine a equação da reta $r : 3x - y + 1$ nas coordenadas (x', y').

(b) Seja γ a base obtida de β trocando-se o sinal do primeiro vetor de β. Sendo $Q = (1, 1)$ e (u, v) coordenadas definidas pelo sistema $\{Q, \gamma\}$, qual é a equação, nas coordenadas usuais, da parábola definida por $u = v^2$?

7. Sejam (x, y, z) coordenadas em relação ao sistema usual de $\mathbb{R}^3$, $S_0 = \{O, i, j, k\}$. Considere o paralelepípedo P com vértices $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$ (quais são os outros quatro?).

(a) Determine os vetores que representam as quatro diagonais de P. Escolha três deles e mostre que formam uma base de R^3. Chame esta base de $\beta = \{V_1, V_2, V_3\}$.

(b) Determine a equação do plano $\pi : x - 3y - z + 10 = 0$ nas coordenadas (x', y', z') definidas pelo sistema $\{O, \beta\}$.

(c) Encontre, nas coordenadas usuais, uma representação paramétrica para a reta

$$r : \begin{cases} x' - 3y' - z' + 10 = 0 \\ 2x' + y' + z' - 5 = 0 \end{cases} .$$

8. Nesta questão, todos os sistemas de coordenadas têm mesma origem O. Sejam (x, y, z) coordenadas em relação à base usual $\{i, j, k\}$; (u, v, w) coordenadas em relação à base $\beta = \{j, i, i - j + k\}$ e (r, s, t) coordenadas em relação à base $\gamma = \{k, i - j, i + j\}$.

(a) Dado um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ com $P_\beta = (3, 2, 1)$, ache P_γ.

(b) Determine a equação do plano rt nas coordenadas (u, v, w).

9. Seja $V_1 = \sqrt{3}/3(1, 1, 1)$.

(a) Complete V_1 a uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^3$.

(b) Sendo $Q = (0, 2, 1)$ e (x', y', z') coordenadas definidas pelo sistema $S = \{Q, \beta\}$, qual é a equação do plano $\pi : 2x' - y' + z' = 0$ nas coordenadas usuais?

10. Considere em $\mathbb{R}^2$ a reta $r : x - 2y = 0$. Sejam $Q = (4, 2)$ e (x', y') coordenadas definidas pelo sistema $S = \{Q, i, j\}$. Qual é a equação de r nas coordenadas do sistema S?