

**Geometria Analítica e Álgebra Linear – GAAL**  
**MATRIZES – Lista de Exercícios 1**

1. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontre:

- a)**  $A + B$     **b)**  $AC$     **c)**  $BC$     **d)**  $CD$   
**e)**  $DA$     **f)**  $DB$     **g)**  $-A$     **h)**  $-D$ .

2. Qual é o valor de  $c_{23}$  na multiplicação das matrizes abaixo?

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -2 \\ -4 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 & -4 \\ -2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}.$$

3. Considere a multiplicação de matrizes  $3 \times 3$  abaixo, em que os pontos de interrogação representam coeficientes desconhecidos:

$$\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ ? & -7 & 2 \\ ? & -4 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -9 & ? \\ ? & 5 & ? \\ 4 & -8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Só é possível determinar um coeficiente da matriz produto. Qual é ele e qual é o seu valor?

4. Ache  $x, y, z, w$  tais que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que não existem  $x, y, z, w$  tais que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Existem  $x, y, z, w$  tais que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

5. Se

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

encontre uma matriz  $B$  tal que  $B^2 = A$  ( $B$  é uma “raiz quadrada” de  $A$ ). Encontre todas as soluções da equação matricial  $X^2 = A$ .

6. A equação  $x^2 = 1$  possui apenas duas soluções reais:  $x = 1$  e  $x = -1$ . Acha todas as matrizes  $2 \times 2$  que são soluções da equação matricial  $X^2 = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ .
7. Os únicos números reais cujos quadrados são eles próprios são 0 e 1. Ache todas as matrizes quadradas  $A$ ,  $2 \times 2$ , tais que  $A^2 = A$ .

8. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qual é o valor de  $x$  para que tenhamos  $A^t = A$ ?

9. Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

mostre que  $AB = AC$ .

10. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Mostre que  $AB = BA = 0$ ,  $AC = A$  e  $CA = C$ .
- (b) Use os resultados do item anterior para mostrar que  $ACB = CBA$ ,  $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$  e  $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$ .
11. Sejam  $A, B, C$  matrizes tais que  $AB = AC$ . Se existir uma matriz  $Y$  tal que  $YA = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade, então podemos concluir que  $B = C$ ?

12. Falso ou Verdadeiro? Justifique.

(a) Se  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , então  $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ .

(b)  $(A + B)^t = B^t + A^t$ .

(c) Se  $AB = 0$ , então  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

(d) Se  $AB = 0$ , então  $BA = 0$ .

(e) Se podemos efetuar o produto  $AA$ , então  $A$  é uma matriz quadrada.

(f)  $(-A)(-B) = -(AB)$ .

(g) Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes. Se  $A = 0$ , então  $BA$  sempre existe.

13. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela tabela:

	Ferro	Madeira	Vidro	Tinta	Tijolo
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterrâneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

- (a) Se ele pretende construir 5, 7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?
- (b) Suponha que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10. Qual é o preço unitário de cada tipo de casa?
- (c) Qual é o custo total do material empregado?