

**Geometria Analítica e Álgebra Linear – GAAL**  
**RETAS E PLANOS – Lista de Exercícios 1**

1. A reta  $r$  passa pelo ponto  $A(4, -3, -2)$  e é paralela à reta

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Se  $P(m, n, -5) \in r$ , determinar  $m$  e  $n$ .

2. Seja o triângulo de vértices  $A(-1, 4, -2)$ ,  $B(3, -3, 6)$  e  $C(2, -1, 4)$ . Escrever as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto médio do lado  $AB$  e pelo vértice oposto  $C$ .
3. Determinar as equações paramétricas e representar graficamente a reta que passa por:
- (a)  $A(3, -2, 4)$  e é paralela ao eixo dos  $x$ ;
  - (b)  $A(2, 2, 4)$  e é perpendicular ao plano  $xOz$ ;
  - (c)  $A(-2, 3, 4)$  e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos  $x$  e dos  $y$ ;
  - (d)  $A(4, -3, -2)$  e tem a direção de  $3i - 2j$ ;
  - (e)  $A(4, -3, -2)$  e  $B(3, 3, 4)$ .

4. Encontrar as equações paramétricas da reta que passa por  $A$  e é simultaneamente ortogonal às retas  $r_1$  e  $r_2$ , nos casos:

(a)

$$A(3, 2, -1), \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3. \end{cases}$$

(b)

$$A(0, 0, 0), \quad r_1 : \frac{x}{2} = y = \frac{z-3}{2} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = -t + 1 \\ z = 2. \end{cases}$$

(c)  $A$  é a interseção de  $r_1$  e  $r_2$

$$r_1 : x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y. \end{cases}$$

5. Verificar se as retas são concorrentes e, em caso afirmativo, encontrar o ponto de interseção:

(a)

$$r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} y = 3x + 7 \\ z = x + 1 \end{cases}$$

(b)

$$r_1 : \left\{ \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4} \right. \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 3t \end{cases}$$

(c)

$$r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x - 10. \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} y = 3x + 7 \\ z = x + 1 \end{cases}$$

(d)

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 5t \\ z = 6 - 6t. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -3 + 6h \\ y = 1 + 7h \\ z = -1 + 13h \end{cases}$$

(e)

$$r_1 : (x, y, z) = (2, 4, 1) + t(1, -2, 3) \quad \text{e} \quad r_2 : (x, y, z) = (-1, 2, 5) + t(4, 3, -2)$$

(f)

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - t \\ z = -t. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 6 - x \\ z = 2 - x \end{cases}$$

6. Determinar o ângulo da reta que passa por  $A(3, -1, 4)$  e  $B(1, 3, 2)$  forma com a sua projeção ortogonal no plano  $xy$ .

7. Dados o ponto  $A(3, 4, -2)$  e a reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t, \end{cases}$$

(a) determinar as equações paramétricas da reta que passa por  $A$  e é perpendicular a  $r$ ,

(b) calcular a distância de  $A$  a  $r$ ;

(c) determinar o ponto simétrico de  $A$  em relação a  $r$ .

8. Os seguintes pares de retas  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas ou concorrentes. Encontre uma equação geral do plano que as contém.

(a)

$$r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{z-1}{-1} \\ y = -1 \end{cases}$$

(b)

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

9. Dado o ponto  $P(5, 2, 3)$  e o plano  $\pi : 2x + y + z = 0$ , determinar
- (a) equações paramétricas da reta que passa por  $P$  e é perpendicular a  $\pi$ ;
  - (b) a projeção ortogonal de  $P$  sobre o plano  $\pi$ ;
  - (c) o ponto  $P'$  simétrico de  $P$  em relação a  $\pi$ ;
  - (d) a distância de  $P$  a o plano  $\pi$ .
10. Dada a reta  $r : (x, y, z) = (3 + t, 1 - 2t, -1 + 2t)$ , determinar as equações reduzidas das retas projeções de  $r$  sobre os planos  $xOy$  e  $xOz$ .
11. Estabelacer as equações gerais dos planos bissetores dos ângulos formados pelos planos  $xOy$  e  $yOz$ .
12. Calcular  $k$  modo que a reta determinada por  $A(1, -1, 0)$  e  $B(k, 1, 2)$  seja paralela a ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 3h \\ y = 1 + 2h + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

13. Achar o ponto  $N$ , projeção ortogonal do ponto  $P(3, -1, -4)$  no plano determinado pelos pontos  $A(2, -2, 3)$ ,  $B(4, -3, -2)$  e  $C(0, -4, 5)$ . Qual é o ponto simétrico de  $P$  em relação a este plano?

## RESPOSTAS

1.  $m = 13, n = -15$ .

2.  $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 4 + 4t. \end{cases}$

3. (a)  $r : (x, y, z) = (3 + t, -2, 4)$ ;  
 (b)  $r : (x, y, z) = (2, 2 + t, 4)$ ;  
 (c)  $r : (x, y, z) = (-2, 3, 4 + t)$ ;  
 (d)  $r : (x, y, z) = (4 + 3t, -3 - 2t, -2)$ ;  
 (e)  $r : (x, y, z) = (3 - t, 3 + 6t, 4 + 6t)$ .

4. (a)  $r : (x, y, z) = (3 - t', 2 + t', -1)$ ;  
 (b)  $r : (x, y, z) = (2t, 6t, -5t)$ ;  
 (c)  $r : (x, y, z) = (-2 + t', 3 - 5t', 2 + 2t')$ .

5. (a) As retas não são concorrentes.  
 (b) As retas não são concorrentes.  
 (c) As retas não são concorrentes.  
 (d)  $P = (3, 8, 12)$   
 (e) As retas não são concorrentes.  
 (f) As retas são coincidentes.

6.  $\theta = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$

7. (a)  $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 4 \\ z = -2 + 2t \end{cases}$  ;

(b)  $2\sqrt{5}$ ;

(c)  $A' = (-5, 4, 2)$

8. (a) As retas são concorrentes em  $P(1, -1, 1)$ ;  $\pi : x + y + 3z - 3 = 0$ ;  
 (b) As retas são concorrentes em  $P(1, -2, 3)$ ;  $\pi : 5x - 6y - 8z + 7 = 0$

9. (a)  $r : (x, y, z) = (5 + 2t, 2 + t, 3 + t)$

(b)  $P_{\perp} = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(c)  $P' = (-5, -3, -2)$

(d)  $5\frac{\sqrt{6}}{2}$

10.  $r_{xOy} = (3 + t', 1 - 2t', 0)$ ,  $r_{xOz} = (3 + t, 0, -1 + 2t)$

11.  $x - y = 0$

12.  $k = 3/2$

13.  $N = (\frac{18}{7}, -\frac{17}{14}, \frac{47}{14})$ ,  $P' = (\frac{15}{7}, \frac{10}{7}, -\frac{9}{14})$