Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Geometria Analítica e Álgebra Linear – GAAL

RETAS E PLANOS – Lista de Exercícios 3

1. Determine a reta t, contida no plano $\pi : x - y + z = 0$, e que é concorrente com as retas

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ x = y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

2. Obtenha o plano que contém a reta $r = \{(1,1,0)+t(2,1,2), t \in \mathbb{R}\}$ e é paralelo à reta $s : \frac{x+1}{2} = y = z+3$.

3. Existe alguma reta paralela a $r = \{(0,1,1) + t(1,-1,-1), t \in \mathbb{R}\}$, contida no plano $\pi : x - 2y + 3z - 1 = 0$? Por quê?

4. Considere as retas $r = \{(1,1,0) + t(0,1,1), t \in \mathbb{R}\}$ e $s : \frac{x-1}{2} = y = z$. Sejam A o ponto de intersecção de s e $\pi : x-y+z = 2$; B e C as intersecções de r com os planos coordenados xz e xy respectivamente. Calcule a área do triângulo ABC.

5. Verifique que a intersecção dos planos $\pi_1 : x - y = 0$, $\pi_2 : x + z = 0$ e $\pi_3 : x - y + 3z + 3 = 0$ é um ponto. Modifique o coeficiente de y na equação do plano π_3 para que a intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ seja uma reta.

6. Determine, caso exista, uma reta que passa por P e intercepta r e s nos pontos A e B de modo que os segmentos AP e BP sejam congruentes, nos seguintes casos:

   (a) $P = (1,1,9)$, $r = \{(0,-4,1) + t(2,1,0), t \in \mathbb{R}\}$ e $s = \{(0,-3,-3 + t(1,0,2), t \in \mathbb{R}\}$

   (b) $P = (1,2,3)$, $r = \{t(1,0,1), t \in \mathbb{R}\}$ e $s = \{(1,1,1) + t(2,1,1), t \in \mathbb{R}\}$

   Interprete geometricamente.

7. Dados os planos $\pi_1 : x - y = 0$, $\pi_2 : x + y - z + 1 = 0$ e $\pi_3 : x + y + 2z - 2 = 0$, determine o plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é perpendicular a π_3.

8. Calcule a medida do (cosseno do) ângulo entre a diagonal de um cubo e suas arestas.

9. Ache os pontos de $r : x - 1 = 2y = z$ que equidistam de $s = \{(2,t,0), t \in \mathbb{R}\}$ e do eixo x.

10. Um quadrado $ABCD$ tem a diagonal BD contida na reta $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Sabendo que $A = (0,0,0)$, determine os vértices B, C e D.

11. Determine o plano que passa pelos pontos $P = (1,1,-1)$ e $Q = (2,1,1)$ e que dista 1 da reta $r = \{(1,0,2) + t(1,0,2), t \in \mathbb{R}\}$.

12. Encontre condições sobre o vetor $v = (a, b, c)$ para que exista uma reta na direção de v que intercepte simultaneamente as retas r e s nos ítens abaixo:

   (a)
$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

   (b)
$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

   (c)
$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases}$$

13. Em cada item abaixo, as equações representam as trajetórias retilíneas de duas partículas com velocidade uniforme. Determine se as trajetórias se interceptam. Em caso afirmativo, determine se há colisão entre as partículas.
   (a) $\alpha(t) = (1 + t, -2t, 3 - t)$ e $\beta(t) = (-2 + t, 6 - 2t, 6 - t)$.
   (b) $\gamma(t) = (1 + t, -2t, 3 - t)$ e $\delta(t) = (-1 + t, 4 - 2t, -3 - t)$.
   (c) $\varepsilon(t) = (1 + t, -2t, 3 - t)$ e $\eta(t) = (6 + t, -10 - t, -2 - t)$.
   (d) $\theta(t) = (1 + t, -2t, 3 - t)$ e $\lambda(t) = (6 + 2t, -10 - 2t, -2 - 2t)$.
   (e) $\mu(t) = (1 + t, -2t, 3 - t)$ e $\nu(t) = (5 + t, -10 - t, -2 - t)$.

14. Encontre a equação da reta simétrica à reta r em relação ao plano π em cada um dos casos abaixo.

   (a)
$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 7t \\ z = -2 + 5t \end{cases} \qquad \text{e} \quad \pi : x - y + z = 1.$$

   (b)
$$r : \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3y + z = -8 \end{cases} \qquad \text{e} \quad \pi : x - y + z = 0.$$

   (c)
$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad \text{e} \quad \pi : x - y + z = 2.$$