Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Geometria Analítica e Álgebra Linear – GAAL

VETORES – Lista de Exercícios 1

1. Sabendo que o ponto $P(-3, m, n)$ pertence à reta que passa pelos pontos $A(1, -2, 4)$ e $B(-1, -3, 1)$, determinar m e n.
2. Sendo $A(2, -5, 3)$ e $B(7, 3, -1)$ vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ e $M(4, -3, 3)$ o ponto de interseção das diagonais, determine os vértices C e D.
3. Dados três pontos $A(1, -5, 8)$, $B(5, 2, 4)$ e $C(3, 9, 1)$, ache três pontos diferentes tais que cada um deles forma com A, B, C um paralelogramo.
4. Que condições devem satisfazer os vetores a e b para que o vetor $a + b$ divida o ângulo formado por eles em dois ângulos iguais?
5. Que condições devem satisfazer os vetores a e b para que sejam válidas as relações seguintes?
   (a) $\|a + b\| = \|a - b\|$
   (b) $\|a + b\| > \|a - b\|$
   (c) $\|a + b\| < \|a - b\|$.
6. Dados os vetores $a = (2, -3, 6)$ e $b = (-1, 2, -2)$, calcule as coordenadas do vetor c bissetriz do ângulo formado pelos vetores a e b, sabendo-se que $\|c\| = 3\sqrt{42}$.
7. Provar, utilizando o produto escalar, que o ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.
8. Determinar os ângulos internos de um triângulo ABC, sendo $A(3, -3, 3)$, $B(2, -1, 2)$ e $C(1, 0, 2)$.
9. Sabendo que $\|u\| = \sqrt{2}$, $\|v\| = \sqrt{3}$ e que u e v formam ângulo de $3\pi/4$, determinar:
   (a) $|(2u - v) \cdot (u - 2v)|$.
   (b) $\|u - 2v\|$.
10. Mostre que o segmento de reta que liga um vértice de um paralelogramo ao ponto médio de um dos lados opostos trissecta a diagonal (isto é, intercepta a diagonal em um ponto que a divide em dois segmentos, um tendo um terço do comprimento da diagonal e o outro tendo dois terços do comprimento da diagonal).
11. Se de um ponto qualquer R dentro de um paralelogramo $ABCD$ são traçados segmentos de reta paralelos aos lados, são formados quatro novos paralelogramos (isto é, o paralelogramo original é a união destes quatro paralelogramos menores). Mostre que as diagonais de quaisquer dois destes paralelogramos (que não sejam as diagonais que se interceptam no ponto R) se interceptam na reta suporte de uma das diagonais do paralelogramo original.
12. Seja O a origem de um sistema de coordenadas no plano. Mostre que se ABC é um triângulo qualquer, suas medianas se interceptam no ponto
$$M = \frac{OA + OB + OC}{3}.$$

13. Mostre que as três bissetrizes de um triângulo se interceptam em um ponto.

14. Para cada um dos pares de vetores u e v, encontrar a projeção ortogonal de v sobre u e decompor v como soma de v_1 com v_2, sendo $v_1 \parallel u$ e $v_2 \perp u$.

    (a) $u = (1, 2, -2)$ e $v = (3, -2, 1)$.

    (b) $u = (1, 1, 1)$ e $v = (3, 1, -1)$.

    (c) $u = (2, 0, 0)$ e $v = (3, 5, 4)$.

    (d) $u = (3, 1, -3)$ e $v = (2, -3, 1)$.

15. Sendo $A(-2, 3)$ e $B(6, -3)$ extremidades de um segmento, determinar:

    (a) Os pontos C, D e E que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento.

    (b) Os pontos F e G que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento.

16. Sejam os pontos $A(-1, -1, 2)$, $B(2, 1, 1)$, e $C(m, -5, 3)$.

    (a) Para que valores de m o triângulo ABC é retângulo em A?

    (b) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

17. Mostre que se X e Y são dois vetores tais que $X + Y$ é ortogonal a $X - Y$, então $\|X\| = \|Y\|$.

18. Demonstrar que o vetor $p = b - \dfrac{a \cdot b}{a \cdot a}\, a$ é perpendicular ao vetor a.

19. Dados os pontos $A(-2, 3, 4), B(3, 2, 5), C(1, -1, 2), D(3, 2, -4)$, calcular $\text{proj}_{CD} AB$.

20. Dado $v_1 = (1, -2, 1)$, determine vetores v_2 e v_3, de modo que os três sejam mutuamente ortogonais.

21. Seja $ABCD$ um tetraedro e P um ponto qualquer dentro dele. Ligue os vértices A, B, C, D até o ponto P e prolongue as linhas até que elas interceptem as faces opostas nos pontos A', B', C', D', respectivamente. Mostre que vale a seguinte relação:

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} + \frac{PD'}{DD'} = 1.$$