Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Geometria Analítica e Álgebra Linear – GAAL

VETORES – Lista de Exercícios 2

1. Determinar $u \cdot v$, sabendo que $\|u \times v\| = 12$, $\|u\| = 13$ e v é unitário.
2. Os pontos médios dos lados do triângulo ABC são $M(0,1,3)$, $N(3,-2,2)$ e $P(1,0,2)$. Determinar a área do triângulo ABC.
3. Verifique se os pontos $A(1,2,4), B(-1,0,2), C(0,2,2)$ e $D(-2,1,3)$ estão no mesmo plano ou não.
4. Sejam $A(1,2,-1)$, $B(5,0,1)$, $C(2,-1,1)$ e $D(6,1,-3)$ vértices de um tetraedro. Calcule:
   (a) o volume deste tetraedro;
   (b) a altura do tetraedro relativa ao vértice D.
5. Sabendo que $u \cdot (v \times w) = 2$, calcular:
   (a) $u \cdot (w \times v)$.
   (b) $v \cdot (w \times u)$.
   (c) $(v \times w) \cdot u$.
   (d) $(u \times w) \cdot 3v$.
   (e) $u \cdot (2w \times v)$.
   (f) $(u + v) \cdot (u \times w)$.
6. Para quais valores de m os pontos $A(m,1,2), B(2,-2,-3), C(5,-1,1)$ e $D(3,-2,-2)$ são coplanares?
7. Sendo $\|u\| = 3, \|v\| = 4$ e $120°$ o ângulo entre os vetores u e v, calcule:
   (a) $\|u + v\|$;
   (b) $\|u \times (v - u)\|$.;
   (c) o volume do paralelepípedo determinado por $u \times v$, u e v.
8. Mostre que os vetores a, b, c, que satisfazem a relação

   $$a \times b \;+\; b \times c \;+\; c \times a \;=\; 0$$

   são coplanares.
9. Mostre que

   $$(a \times b) \cdot (c \times d) \;+\; (a \times c) \cdot (d \times b) \;+\; (a \times d) \cdot (b \times c) = 0.$$

10. Usando a propriedade de que podemos trocar os sinais $\times$ e $\cdot$ em um produto misto, mais a fórmula do *produto vetorial triplo*:
$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$
(consulte o livro texto para ver porque estas duas propriedades são válidas), prove que
$$(A \times B) \cdot (C \times D) = \det \begin{pmatrix} A \cdot C & A \cdot D \\ B \cdot C & B \cdot D \end{pmatrix}.$$

11. Denote por [U,V,W] o produto misto $U \cdot (V \times W)$. Sejam a, b, c três vetores não coplanares. Os vetores
$$a' = \frac{b \times c}{[a,b,c]},\ b' = -\frac{a \times c}{[a,b,c]},\ c' = \frac{a \times b}{[a,b,c]}$$
são chamados os **vetores recíprocos** aos vetores a, b, c.

Uma das utilidades dos vetores recíprocos é para encontrar as coordenadas de um vetor v qualquer em termos dos vetores a, b, c. Isto é, queremos encontrar escalares x, y, z tais que
$$v = xa + yb + zc.$$

(a) Mostre que
$$v = (v \cdot a')a \ + \ (v \cdot b')b \ + \ (v \cdot c')c.$$
Em outras palavras,
$$x = v \cdot a',\ y = v \cdot b',\ z = v \cdot c'.$$

(b) Mostre que se a, b, c são três vetores unitários, dois a dois ortogonais e que satisfazem a regra da mão direita, então $a' = a$, $b' = b$ e $c' = c$ (ou seja, neste caso os vetores recíprocos de a, b, c são eles próprios). Em particular, segue que
$$v = (v \cdot a)a \ + \ (v \cdot b)b \ + \ (v \cdot c)c.$$

(c) Verifique que se
$$v = xa' + yb' + zc',$$
então
$$v = (v \cdot a)a' \ + \ (v \cdot b)b' \ + \ (v \cdot c)c'.$$

(d) Mostre que valem as relações
$$a' \cdot a = b' \cdot b = c' \cdot c = 1,$$
$$a' \cdot b = a' \cdot c = b' \cdot a = b' \cdot c = c' \cdot a = c' \cdot b = 0.$$
Em outras palavras, o produto escalar de vetores correspondente é 1, enquanto que o produto escalar de vetores não-correspondentes é 0.

(e) Reciprocamente, mostre que se
$$A \cdot a = B \cdot b = C \cdot c = 1,$$
$$A \cdot b = A \cdot c = B \cdot a = B \cdot c = C \cdot a = C \cdot b = 0,$$
então
$$A = a',\ B = b',\ C = c'.$$

(f) Conclua que os vetores recíprocos de a', b', c' são exatamente a, b, c.

12. Prove (veja o exercício anterior) que
$$[a', b', c'] = \frac{1}{[a, b, c]}.$$

13. Mostre que se
$$u = u_a a + u_b b + u_c c,$$
$$v = v_a a + v_b b + v_c c,$$
$$w = w_a a + w_b b + w_c c,$$
então
$$u \cdot (v \times w) = \det \begin{pmatrix} u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \\ w_a & w_b & w_c \end{pmatrix} [a \cdot (b \times c)].$$
Se $a = i$, $b = j$ e $c = k$, como fica esta fórmula?

14. Usando a relações obtidas nos dois exercícios anteriores, prove a seguinte fórmula
$$(u \cdot v \times w)(a \cdot b \times c) = \det \begin{pmatrix} u \cdot a & u \cdot b & u \cdot c \\ v \cdot a & v \cdot b & v \cdot c \\ w \cdot a & w \cdot b & w \cdot c \end{pmatrix}.$$
Esta fórmula reduz o cálculo de dois determinantes (pois cada produto misto envolve o cálculo de um determinante) ao cálculo de um.

15. Use a fórmula obtida no exercício anterior para provar que
$$u \cdot (v \times w) = \|u\| \, \|v\| \, \|w\| \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & \cos(u, v) & \cos(u, w) \\ \cos(u, v) & 1 & \cos(v, w) \\ \cos(u, w) & \cos(v, w) & 1 \end{pmatrix}}$$

16. Mostre que se as coordenadas dos quatro vértices de um tetraedro são
$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ (x_3, y_3, z_3),\ (x_4, y_4, z_4),$$
então o seu volume é dado por
$$Vol = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix}.$$
(Sugestão: Verifique primeiro que o volume do tetraedro é um sexto do volume do paralelepípedo determinados pelos seus vértices.)