MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
3a. Lista de Exercícios - 1o. semestre de 2018

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfícies abaixo e calcule sua área:

(a) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ interior ao cone $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$;
(b) S é a parte do cilindro $x^2+z^2=1$ compreendida entre os planos $y=-1$ e $y=3$;
(c) S é a parte do plano $z=2x+3y$ que é interior ao cilindro $x^2+y^2=16$;
(d) S é a parte do parabolóide hiperbólico $z=y^2-x^2$ que está entre os cilindros $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$;
(e) S é a parte do cilindro $x^2+z^2=a^2$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=a^2$, onde $a>0$;
(f) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=ax$, onde $a>0$;
(g) S é o toro obtido pela rotação da circunferência no plano xz com centro $(b,0,0)$ e raio $a<b$ em tôrno do eixo z;
(h) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ com $z \geq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$.
(i). S é a parte do parabolóide $z=1-2x^2-y^2$ limitada pela superfície $16x^2+4y^2=1$.

Resp. (a) $4\pi(2-\sqrt{2})$, (b) 8π, (c) $16\pi\sqrt{14}$, (d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$, (e) $8a^2$, (f) $2a^2(\pi-2)$, (g) $4ab\pi^2$, (h) 4π, (i) $\frac{\pi}{12}(2\sqrt{2}-1)$.

2. Sejam $0<a<b$ e $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ uma função positiva com derivada contínua. Determine equações paramétricas das superfícies geradas pela rotação da curva $y=f(x)$ em torno do (a) eixo-x, (b) eixo-y. Calcule a área da superfície em cada caso. Resp. (a) $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$, (b) $2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}dx$.

3. Calcule as seguintes integrais de superfícies:

(a) $\displaystyle\iint_S y\,d\sigma$, onde S é a superfície dada por $z=x+y^2$, $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 2$;
(b) $\displaystyle\iint_S x^2\,d\sigma$, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$;
(c) $\displaystyle\iint_S yz\,d\sigma$, onde S é a parte do plano $z=y+3$ limitada pelo cilindro $x^2+y^2=1$;
(d) $\displaystyle\iint_S xy\,d\sigma$, onde S é o bordo da região limitada pelo cilindro $x^2+z^2=1$ e pelos planos $y=0$ e $x+y=2$;
(e) $\displaystyle\iint_S z(x^2+y^2)\,d\sigma$, onde S é o hemisfério $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$;
(f) $\displaystyle\iint_S xyz\,d\sigma$, onde S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ interior ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$;
(g) $\displaystyle\iint_S \sqrt{\frac{2x^2+2y^2-2}{2x^2+2y^2-1}}\,d\sigma$, onde S é a parte de $x^2+y^2-z^2=1$ com $1\leq z\leq 3$;
(h) $\displaystyle\iint_S (x+1)d\sigma$, onde S é a parte de $z=\sqrt{x^2+y^2}$ limitada por $x^2+y^2=2y$.

Resp: (a) $13\sqrt{2}/3$, (b) $4\pi/3$, , (c) $\pi\sqrt{2}/4$, (d) $\frac{-\pi}{2}(4+\sqrt{2})$, (e) 16π, (f) 0, (g) $8\pi\sqrt{2}$, (h) $\pi\sqrt{2}$.

4. Calcule a massa das superfícies sendo $\delta(x,y,z)$ a densidade pontual de massa para:
(a) S é a parte do plano $3x+2y+z=6$ contida no primeiro octante e $\delta(x,y,z)=y$.
(b) S é o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ e $(0,0,2)$ e $\delta(x,y,z)=xz$.
(c) S é a parte do parabolóide $x=4-y^2-z^2$ contida no semi espaço $x\geq 0$ e $\delta(x,y,z)=x^2+y^2$.

(d) S é a parte de $z = x^2 + y^2 + 2xy$ limitada por $x^2 + y^2 = 2$ e $\delta(x, y, z) = \dfrac{2x^2 + 3y^2}{\sqrt{1 + 8z}}$

(e) S é a parte de $z = \ln(x^2 + y^2)$ limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = e^2$, e $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Resp: (a) $3\sqrt{14}$, (b) $7\sqrt{6}/24$, (c) $\frac{\pi}{840}(12563\sqrt{17} - 2347)$.

5. Calcule a integral de superfície $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\sigma$ para cada um dos campos de vetores $\vec{F}$ e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S. Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada pela normal *exterior*.

(a) $\vec{F}(x, y, z) = x^2y\vec{i} - 3xy^2\vec{j} + 4y^3\vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 9)$ é $\vec{k}$;

(b) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ e S é a parte do plano $3x + 2y + z = 6$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$;

(c) $\vec{F}(x, y, z) = -x\vec{i} - y\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$;

(d) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

(e) $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3z\vec{k}$ e S é o hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, orientada de modo que a normal no ponto $(0, 0, 4)$ é $\vec{k}$;

(f) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} - z\vec{k}$ e S consiste do parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$ e do disco $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$;

(g) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$ e S é o cubo de vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$;

(h) $\vec{F}(x, y, z) = (x+y)\vec{i} - (2y+1)\vec{j} + z\vec{k}$ e S é o retângulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$;

(i) $\vec{F}(x, y, z) = -yz\vec{i}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ exterior ao cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada de modo que a normal no ponto $(2, 0, 0)$ é $\vec{i}$;

(j) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S é a parte da superfície $z = \sqrt{4 - x}$ limitada pela superfície cilíndrica $y^2 = x$, orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{i} > 0$;

(k) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} < 0$.

Resp. (a) 0, (b) $-3\pi/4$, (c) $-73\pi/6$, (d) 108π, (e) 128π, (f) $-\pi/2$, (g) 48, (h) -1, (i) 0, (j) $128/5$, (k) $32/3$.

6. Calcule

(a) $\displaystyle\iint_S xz\, dy \wedge dz + yz\, dz \wedge dx + x^2\, dx \wedge dy$, onde S é a semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$, $z \geq 0$, orientada segundo a normal exterior; Resp. $3\pi a^4/4$.

(b) $\displaystyle\iint_S x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$, onde S é a parte do plano $x + y + z = 2$ no primeiro octante, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{j} > 0$; Resp. 8.

(c) $\displaystyle\iint_S x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ contida no semiespaço $z \geq 2y + 1$, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$. Resp. 28π.

7. Suponha que a superfície S seja o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, orientada de modo que sua normal unitária $\vec{N}$ tenha a terceira componente não-negativa. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de vetores sobre S, mostre que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iint_D \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dxdy.$$

8. Calcule $\displaystyle\iint_S y^2z^2dy\wedge dz + xdz\wedge dx + ydx\wedge dy$, onde S é a parte da superfície $z^2 = x^2+2y^2$ entre os planos $z=1$ e $z=y+3$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k}<0$. Resp. 54π.

9. Calcule $\displaystyle\iint_S e^{z^2}\ln(z+y)dy\wedge dz + (x^2+z^2)dz\wedge dx + zdx\wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z=4-x^2-y^2$ limitado pelo plano $z=y+4$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k}\geq 0$. Resp. $-\frac{35\pi}{16}$

10. Use o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i}+2xy\vec{j}+3xy\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do plano $3x+y+z=3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp.$\frac{7}{2}$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (z^2+e^{x^2})\vec{i}+(y^2+\ln(1+y^2))\vec{j}+(xy+\sin z^3)\vec{k}$ e γ é a fronteira do triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,2)$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;Resp.$\frac{4}{3}$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (2z+\sin e^{x^3})\vec{i}+4x\vec{j}+(5y+\sin(\sin z^2))\vec{k}$ e γ é a intersecção do plano $z=x+4$ com o cilindro $x^2+y^2=4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp.-4π.

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (x+\cos(x^3))\vec{i}+y\vec{j}+(x^2-y^2+z^{100})\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do parabolóide $z=1-x^2-y^2$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp.-1.

(e) $\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\vec{i}+(2x+(1+y^2)^{20})\vec{j}+(x+y+z)\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2+y^2=2y$ com o plano $z=y$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. π.

(f) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ e γ é a intersecção da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ com o plano $x+y+z=0$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário. Resp. $-a^2\pi\sqrt{3}$.

11. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$, sendo:

(a) $\vec{v} = (yz, xz+\ln(1+y^4), zy)$ e γ é a intersecção das superfícies $x^2+y^2=4$ e $z=2x+3$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -24π.

(b) $\vec{v} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{z^3}{1+z^2})$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2+y^2=1$ com o plano $x+y+z=4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário; Resp. -2π.

(c) $\vec{v} = (2xz^3+y, x^2y^2, 3x^2z^2)$ e γ é a intersecção das superfícies $z=\sin y+10$ e $x^2+y^2=16$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. -16π.

(d) $\vec{v} = (x-y^2, x-z+\frac{y^2}{2+\sin y}, y)$ e γ é a intersecção do parabolóide $4z=x^2+y^2$ com o cilindro $x^2+y^2=4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. 4π.

(e) $\vec{v} = (e^x\sin y, e^x\cos y - z, y)$ e γ é o bordo da superfície obtida pela rotação em tôrno do eixo Oz do gráfico de $z=\frac{1}{y^2}$, $e\leq y\leq e^2$. Escolha uma orientação para γ. Resp. 0.

(f) $\vec{v} = (\cos(1+x^2), \frac{-z}{y^2+z^2}+e^{y^4}, \frac{y}{y^2+z^2})$ e γ é a intersecção do cilindro $y^2+z^2=4$ com o plano $x=y+z$, orientada de modo que sua projeção no plano yz seja percorrida uma vez no sentido anti-horário. Resp. 2π.

12.

(a) Calcule $\displaystyle\int_\gamma (z+y^2)dx+(y^2+1)dy+[\ln(z^2+1)+y]dz$, sendo $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 10-2\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$. Resp. 4π.

(b) Seja γ a curva de intersecção do prisma (superfície) de faces $x=2$, $x=-2$, $y=3$, $y=-3$, com o plano $z=-x+4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \left[\frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2}\right]dx + \left[\frac{x}{x^2+(y-1)^2}+z\right]dy + \sin z dz.$ Resp. $2\pi-24$.

(c) Calcule $\int_\gamma \vec{v}.d\vec{r}$ onde $\vec{v}(x,y,z) = (xy+y)\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2+y^2=4$ com a superfície $z = cos(y^2)+5$ orientada de modo que sua projeção no plano xy tenha sentido anti-horário.Resp.-4π.

13. Seja γ uma curva simples, fechada e plana e seja $\vec{N} = (a,b,c)$ um vetor unitário normal ao plano que contém γ. Mostre que a área da região plana limitada por γ é dada por

$$\frac{1}{2}\int_\gamma (bz-cy)dx + (cx-az)dy + (ay-bx)dz,$$

com γ orientada pela orientação induzida de $\vec{N}$.

14.
(a). Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ sendo

$$\vec{F}(x,y,z) = (z^2 + \text{sen}(x^3),\ y^2,\ xy + e^{z^3})$$

e γ dada pela intersecção da esfera $x^2+y^2+z^2=9$ com o plano $2x-z=0$ percorrida de $(0,3,0)$ a $(0,-3,0)$, $z \geq 0$.

(b). Seja o campo vetorial

$$\vec{v}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\ ,\ 0\right) + (e^{x^4}\ ,\ \text{sen}\,(\text{sen}\ y^5)\ ,\ \ln(1+z^4))$$

e a curva γ dada pela intersecção das superfícies $x^2+y^2=4$, $z = 5+\ln(1+y^2)$ cuja projeção no plano xy é percorrida uma vez no sentido horário. Calcule $\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$.

(c). Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ sendo $\vec{F} = (-2x+y)\vec{i} + ((z^2\cos\,y)-y)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}$ e γ a intersecção das superfícies $z = \sqrt{x^2+2y^2}$ e $z = y+1$ com projeção no plano xy percorrida uma vez no sentido horário.

Resp. (a) 0, (b) 2π, (c) -2π.

15. Calcule $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{N}d\sigma$, onde $\vec{v} = (x^2+ye^z, y^2+ze^x, z^2+xe^y)$ e S é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2+y^2=1$ entre os planos $z=0$ e $z=x+2$, orientada pela normal exterior. Resp. $\frac{19\pi}{4}$.

16. Calcule $\iint_S dy\wedge dz + y^3dz\wedge dx + z^2dx\wedge dy$, onde S está orientada pela normal exterior nos seguintes casos:
(a) S é a esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$;
(b) S é a fronteira da região limitada por $z=4$ e $z=x^2+y^2$. Resp. (a) $\frac{4\pi}{5}r^5$, (b) $\frac{176\pi}{3}$.

17. Seja $\vec{v} = \frac{\vec{r}}{|r|^3}$, onde $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Calcule $\iint_S \vec{v}\cdot\vec{N}d\sigma$, onde $\vec{N}$ é a normal unitária exterior a S nos seguintes casos:
(a) S é a esfera de raio $a>0$ com centro na origem; Resp. 4π.
(b) S é uma superfície fechada lisa por partes tal que a origem não pertence a S nem à região interior a S; Resp. 0.
(c) S é uma superfície fechada lisa por partes que contém a origem em seu interior. Resp. 4π.

18. Calcule $\displaystyle\iint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{N} dS$ sendo:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, orientada pelo campo de vetores normais que aponta para cima; Resp. -4π.
(b) $\vec{F}(x,y,z) = (xz,\ x - y,\ x^2 y)$ e S formada pelas 3 faces, que não estão no plano xy, do tetraedro formado pelos planos coordenados e o plano $3x + y + 3z = 6$, sendo $\vec{N}$ o campo normal exterior ao tetraedro; Resp. 6.
(c) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, z, yz)$ e S a parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ limitada por $x^2 + y^2 = 4$ com normal que aponta para o eixo z. Resp. 0.

19. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S ($\vec{N}$ = normal unitária exterior), para:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = -xz\vec{i} + (y^3 - yz)\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; Resp.$\frac{4}{5}\pi ab^3 c$.
(b) $\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + y\,\text{sen}(z),\ y^3 + z\,\text{sen}(x),\ 3z)$ e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$. Resp. $\frac{194\pi}{5}$.
(c) $\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + z\vec{k}$ e $S = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 = (z-2)^2,\ 0 \leq z \leq 2\}$, sendo $\vec{N}$ o campo de vetores unitários normais a S tal que $\vec{N}.\vec{k} > 0$ Resp.$\frac{14}{3}\pi$
(d) $\vec{F}(x,y,z) = 2y\vec{i} + (x - y)\vec{j} + 4x\vec{k}, S$, onde S é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2 - 8$ abaixo do plano $z = 2x + 4y + 3$ e $\vec{n}$ é a normal exterior ao parabolóide com $\vec{n}.\vec{k} < 0$ Resp. $-\frac{81}{2}\pi$.

20. Seja S uma superfície fechada lisa por partes e orientada pela normal exterior $\vec{N}$ e seja R a região limitada por S. Verifique as seguintes igualdades:
(a) volume de $R = \frac{1}{3}\iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$.
(b) $\displaystyle\iint_S \text{rot}\,\vec{v} \cdot \vec{N} d\sigma = 0$, para qualquer campo $\vec{v}$ de classe C^1 numa região contendo S.

21. Calcule as seguintes integrais
(a) $\displaystyle\iint_S x dy \wedge dz + yze^{z^2} dz \wedge dx - \frac{e^{z^2}}{2} dx \wedge dy$, onde S é a parte de $z = x^2 + y^2$ limitada por $x^2 + y^2 = 1$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$; Resp. $-\frac{\pi}{2}(e+1)$
(b) $\displaystyle\iint_S (x^2 + z^3) dy \wedge dz + z^5 dz \wedge dx + (e^{x^2+y^2} + z^2) dx \wedge dy$, onde S é a parte de $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ interior a $z^2 = x^2 + y^2$, orientada com a normal exterior; Resp. $\pi(e + 11/6)$
(c) $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma$, onde $\vec{F}(x,y,z) = e^{z^2}\cos(zy^2)\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ e S é a parte de $x^2 + y^2 = 1$ limitada por $z = 0$ e $z = y + 3$, orientada com a normal unitária exterior; Resp. 0
(d) $\displaystyle\iint_S z^2 dz \wedge dx + x^2 \ln(x^2 + y^2) dx \wedge dy$, onde S é a parte de $9 + z^2 = x^2 + y^2$ com $0 \leq z \leq 4$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$; R. $(\frac{625}{2}\ln 5 - \frac{81}{2}\ln 3 - 68)\pi$
(e) $\displaystyle\iint_S \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, onde S é a parte de $(z-3)^2 = x^2 + y^2$ com $0 \leq z \leq 3$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$; Resp. 2π
(f) $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + z\vec{k}$ e S é a parte de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ com $0 \leq z \leq 1$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} \leq 0$; Resp. $\frac{2\pi}{3}(1 + \sqrt{3})$
(g) $\displaystyle\iint_S \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, onde S é o elipsóide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, orientada com a normal unitária exterior. Resp. 4π

22.
(a). Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, sendo que

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(4x^2+9y^2+25z^2)^{3/2}}$$

e S é a semi-esfera $x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$ orientada com a normal $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{k}\geq 0$.

(b). Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=\ln(2+\cos(y+z))\vec{i}-yz\vec{j}+\dfrac{z^2}{2}\vec{k}$ e S é a parte do cilindro $x^2+y^2=4$ acima do plano $z=0$ e abaixo do plano $z=y+7$. Considere S orientada com a normal que aponta para fora do cilindro.

(c). Calcule $\displaystyle\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dv$ sendo $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ e S a parte do cilindro $x^2+y^2=2$ entre os planos $z=-\sqrt{2}$ e $z=\sqrt{2}$ com normal $\vec{N}$ tal que $\vec{N}(\sqrt{2},0,0)=(-1,0,0)$.

Resp. (a) , (b) -104π, (c) $2\pi(4-\sqrt{2})$.