1ª Lista: MTM125: Prof. Paulo Magalhães:

Ex.1: Determine a solução geral

1. $\dfrac{dy}{dt}+(\cos t)y=0$

2. $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{2t}{1+t^2}y=\dfrac{1}{1+t^2}$

3. $\dfrac{dy}{dt}+y=te^t$

4. $x\dfrac{dy}{dx}+2y=senx \quad , x>0$

Ex.2: Resolva os seguintes **PVI's**

1. $\begin{cases} y'+(\sqrt{1+t^2})y=0 \\ y(0)=\sqrt{5} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x\,y'+2y=x^2-x+1 \text{ , } 0<x<+\infty \\ y(1)=1/2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} (1+t^2)y'+4ty=t \\ y(1)=1/4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x\,y'+(1+x)y=x \\ y(\ln 2)=1 \end{cases}$

Ex.3: Obtenha uma solução contínua para os seguintes **PVI's**

1. $\begin{cases} y'+y=p(t) \\ y(0)=0 \end{cases}$ onde $p(t)=\begin{cases} 2, & 0\le t\le 1 \\ 0, & 1<t<\infty \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'+p(x)y=0 \\ y(0)=a \end{cases}$ onde $p(t)=\begin{cases} 2, & 0\le x\le 1 \\ 1, & 1<x<+\infty \end{cases}$

Ex.4: Determine o comportamento assintótico (comportamento no "futuro longínquo") das soluções da EDO:

$$\frac{dy}{dt}+ay=be^{-ct}$$

onde $a,c>0$ e $b\in\mathbb{R}$.

Ex.5: Determine o comportamento inicial ($t\to 0^+$) de todas as soluções da EDO:

1. $y'+\dfrac{1}{t}y=\dfrac{1}{t^2}$

2. $y'+\dfrac{1}{\sqrt{t}}y=e^{\frac{1}{2}\sqrt{t}}$

Ex.6: ***Equação de Bernoulli***. Uma classe de EDO's não-lineares muito importantes nas aplicações e que podem ser reduzidas a EDO's lineares de 1ª ordem são as equações de Jakob Bernoulli (1654-1705):

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad \textbf{(B)}$$

Em 1696, Leibniz descobriu que a mudança da variável depende dada por

$$v = y^{1-n}$$

reduz a EDO **(B)** a uma EDO linear de 1ª ordem.

(i) Resolva **(B)** quando n=0 e n=1.
(ii) Reproduza o resultado obtido por Leibniz.

Ex.7: Em 1838 **Verhulst** propôs o primeiro **Modelo Matemático para o Crescimento Logístico** que foi utilizado para descrever a dinâmica populacional. Este modelo é dado pelo seguinte

$$PVI : \begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = rP - kP^2 \ , \ 0 < t < +\infty \\ \qquad\qquad P(0) = P_0 \end{cases}$$

onde $r > 0$ é a taxa de natalidade e $k > 0$ é a taxa de mortalidade da população em questão.Evidentemente sempre se tem $P_0 > 0$. Determine a solução do PVI.

Ex.8: O seguinte Modelo Matemático foi proposto por **Von Bertalanffy** para o crescimento de população de peixes

$$PVI : \begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \beta P^{2/3} - \gamma P \\ \qquad P(0) = 0 \end{cases}$$

onde *P(t)* é o peso do peixe pertencente a espécie caracterizada pelos seguintes parâmetros positivos:

β =constante de anabolismo (taxa de síntese de massa por unidade de área)

γ =constante de catabolismo (taxa de diminuição de massa por unidade de área)

Determine a solução do PVI.

Ex.9: Dada uma EDO Autônoma que possua ***soluções de equilíbrio*** (pontos críticos). Tem-se as seguintes classificações;
(1) uma solução de equilíbrio y_e é dita ser **instável** se todas as soluções acima e abaixo dela, que não sejam soluções de equilíbrio, se afastam dela quando $t \to +\infty$.
(2) uma solução de equilíbrio y_e é dita ser **semi-estável** quando as soluções que se encontram acima (abaixo) dela tendem a ela quando $t \to +\infty$ e todas as soluções que se encontram abaixo(acima) dela se afastam dela quando $t \to +\infty$.

(3) uma solução de equilíbrio y_e é dita ser **assintóticamente estável** quando todas as soluções próximas dela, acima e abaixo, tendem a ela quando $t \to +\infty$.
(4) denomina-se **bacia de atração** de uma solução de equilíbrio ao conjunto dos valores iniciais y_0 cujas respectivas soluções tendem a solução de equilíbrio quando $t \to +\infty$.

Em cada EDO esboce o gráfico de $f(y)$, determine seus zeros (soluções de equilíbrio da EDO), classifique cada um deles, determine as bacias de atração,desenhe a **reta de fase** e esboce alguns gráficos das soluções (curvas integrais);

1. $\dfrac{dy}{dt} = ay + by^2 \quad , a > 0, b > 0.$ 2. $\dfrac{dy}{dx} = y(y-1)(y-2)$ 3. $\dfrac{dy}{dx} = e^y - 1$

4. $\dfrac{dy}{dt} = -2\dfrac{\text{arctg}\, y}{(1+y^2)}$ 5. $\dfrac{dy}{dt} = k(1-y)^2 \quad , k > 0.$ 6. $\dfrac{dy}{dx} = y^2(y^2-1)$

OBS: Para se obter a concavidade dos gráficos das soluções e determinar seus pontos de inflexão basta analisar o sinal de y'', pois quando $y''>0$ o gráfico é convexo e quando $y''<0$ o gráfico é côncavo, e nos pontos aonde $y''=0$ podem ocorrer pontos de inflexão. Para as EDOs Autônomas tem-se que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx} f(y) = f'(y)\frac{dy}{dx} = f'(y) f(y).$$

Ex.10: Se y_e é uma solução de equilíbrio de $y' = f(y)$.Mostre que $\phi(t) = y_e$ é assintóticamente estável se $f'(y_e) < 0$ e instável se $f'(y_e) > 0$.

EX.11: Uma outra EDO que tem sido usada para modelar o crescimento de populações é a **equação de Gompertz**

$$\frac{dy}{dt} = ry\ln\left(\frac{K}{y}\right)$$

onde $r,K > 0$.
(a) esboce o gráfico de $f(y)$, determine as soluções de equilíbrio e as classifique.
(b) para $0 \le y \le K$ determine aonde o gráfico das soluções é convexo e aonde é côncavo. Faça o mesmo para $y > K$.
(c) resolva o seguinte

$$PVI: \begin{cases} y' = ry\ln\left(\dfrac{K}{y}\right) \;, 0 < y < +\infty \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

Sugestão: tome $u = \ln\left(\dfrac{y}{K}\right)$.

-------------- ∫∫∫ --------------