1ª Lista: MTM146: Prof. Paulo Magalhães:

Exercício 1: Mostre que a solução do sistema de EDO's

$$\begin{cases} x' - 2y' = f(t) \\ x'' - y'' + y = 0 \end{cases}$$

com condições iniciais: $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$, f satisfazendo $f(0) = 0$, é dada por

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau - 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = -\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$$

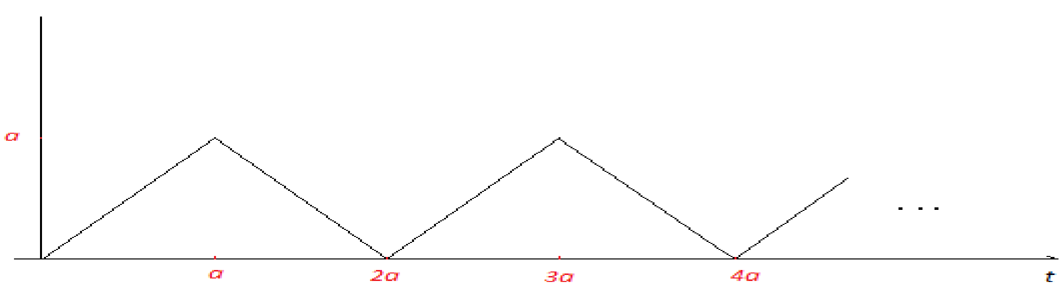
Exercício 2: Resolva o seguinte

$$PVI : \begin{cases} y' + 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau = \begin{cases} t & ,0 < t < 1 \\ 2 - t & ,1 \le t \le 2 \\ 0 & , \quad t > 2 \end{cases} \\ I_0 y = 1 \end{cases}$$

Exercício 3: Resolva o seguinte

$$PVI : \begin{cases} y'' + 4y' + 13y = 2t + 3e^{-2t}\cos 3t \\ I_\pi y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercício 4: Obtenha a transformada de Laplace do seguinte sinal



Exercício 5: Obtenha a transformada de Laplace das seguintes funções

$$(i)te^t f(t) \quad (ii)t^3\cos 3t \quad (iii)te^t\int_0^t x\frac{d}{dx}(e^x \operatorname{sen} x)dx \quad (iv)|\operatorname{sen} t| \ .$$

1ª Lista: MTM146: Prof. Paulo Magalhães:

Exercício 6: Obtenha as funções que possuem as seguintes transformadas de Laplace

$$(i)\ \frac{1}{(s-a)^n} \qquad (ii)\ \frac{e^{-as}}{(s-b)(s-c)},\ a>0 \qquad (iii)\ \frac{e^{-s}}{s^4+1} \qquad (iv)\ \frac{s^2}{s^3+a^3} \qquad (v)\ \ln\left(\frac{s+1}{s+2}\right)$$

Exercício 7: Prove que

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}}\right](t) = \frac{1}{2^n}\int_0^t \tau\, \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^n}\right](\tau)\,d\tau \quad ,\forall n \geq 1, \forall a \neq 0.$$

Exercício 8:

(i) Prove que

$$\int_0^1 u^m(1-u)^n\,du = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

(ii) Com isso prove que

$$(t^m * t^n)(t) = t^{m+n+1}\int_0^1 u^m(1-u)^n\,du \quad ,\forall m,n \in \mathbb{N}$$

(iii) Generalize para o caso em que *m* e *n* são reais positivos e obtenha a ***função beta***.

Exercício 9: (Expansão de Heaviside) : Se $F(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$

onde $q(s)$ é um polinômio de grau *n* com raízes distintas $r_1,\ldots,r_n$ e $p(s)$ é um polinômio de grau menor que *n*, então é possível mostrar pelo método das frações parciais que

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_1}{s-r_1} + \cdots + \frac{A_n}{s-r_n} \qquad (*)$$

onde os coeficientes precisam ser determinados.

(i) Mostre que

$$A_k = \frac{p(r_k)}{q'(r_k)} \quad ,k = 1,\ldots,n\ .$$

Sugestão: multiplique (*) por $(s-r_k)$ e tome o limite $s \to r_k$.

(ii) Mostre que

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(r_k)}{q'(r_k)} e^{r_k t}\ .$$

1ª Lista: MTM146: Prof. Paulo Magalhães:

Exercício 10: Utilize a transformada de Laplace para resolver os seguintes PVI's:

$$(i)\begin{cases} y''+4y'+4y=\begin{cases}0, 0\le t\le 2\\ e^{-(t-2)}, t>2\end{cases} \\ I_0 y=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\end{cases} \qquad (ii)\begin{cases} \dfrac{d^4y}{dt^4}+y=\begin{cases}0, & t\le 1\\ t-1, t>1\end{cases} \\ I_1 y=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

Exercício 11: Utilize a transformada de Laplace para resolver os seguintes PVI's:

$$\text{(i)}\ \begin{cases} y''+4y=H_1(t)-H_2(t) \\ I_0 y=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases} \qquad \text{(ii)}\ \begin{cases} y''+2y'+4y=H_1(t)-H_2(t) \\ I_0 y=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$\text{(iii)}\begin{cases} y''+y=\tfrac{1}{k}H_a(t)(t-a)-\tfrac{1}{k}H_{a+k}(t)(t-(a+k)) \\ I_0 y=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, a>0, k>0.\end{cases}$$

$$\text{(iv)}\begin{cases} y''+y=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k H_{ka}(t) \\ I_0 y=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases}, a>0.$$ Faça $n\to\infty$ na solução.

Exercício 12: Os problemas a seguir tratam dos efeitos de uma sequência de impulsos aplicados em um oscilador não-amortecido dado pelo seguinte

$$PVI:\begin{cases} y''+y=f(t) \\ I_0 y=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

Para cada uma das escolhas de $f(t)$ resolva o PVI:

(i) $f(t)=\sum_{k=1}^{10}\delta(t-k\pi)$ (ii) $f(t)=\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\delta(t-k\pi)$

(iii) $f(t)=\sum_{k=1}^{10}\delta(t-\frac{k\pi}{2})$ (iv) $f(t)=\sum_{k=1}^{10}(-1)^{k+1}\delta(t-\frac{k\pi}{2})$

Exercício 13: Resolver formalmente a seguinte ***Equação Integral do tipo Volterra***

$$y(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\eta)y(\eta)d\eta .$$

Exercício 14: Resolva a equação integral

$$y(t) = a \operatorname{sen} t - 2\int_0^t \cos(t-\eta)y(\eta)d\eta .$$

Exercício 15: Resolva a equação integral

$$y(t) = a \operatorname{sen} bt + c\int_0^t \operatorname{sen} b(t-\mu)y(\mu)d\mu$$

(a) quando $b^2 > bc$; (b) quando $b = c$.

Exercício 16: Resolva a seguinte equação integral ***não-linear***

$$2y(t) + \int_0^t y(\eta)y(t-\eta)d\eta = t + 2 .$$

Exercício 17: Considere a equação integral de Volterra

$$y(t) + \int_0^t (t-\xi)y(\xi)d\xi = \operatorname{sen} 2t . \qquad (*)$$

(i) Resolva (*) usando Laplace.
(ii) Derivando duas vezes (*) mostre que *y(t)* é solução do seguinte

$$PVI : \begin{cases} y'' + y = -4 \operatorname{sen} 2t \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(iii) Resolva o PVI acima e comprove que a solução é a mesma que a do item (i).

1ª Lista: MTM146: Prof. Paulo Magalhães:

Exercício 18: Em cada uma das equações integrais abaixo repita os procedimentos (i),(ii) e (iii) do exercício 14:

1. $y(t)+\int_0^t (t-\xi)y(\xi)d\xi = 1$.

2. $y(t)+2\int_0^t \cos(t-\xi)y(\xi)d\xi = e^{-t}$.

3. $y'(t)+\int_0^t (t-\xi)y(\xi)d\xi = t$, $y(0)=0.$

3. $y'(t)+y(t)=\int_0^t \mathrm{sen}(t-\xi)y(\xi)d\xi$, $y(0)=1.$

Exercício 19: A equação

$$\int_0^t (t-\tau)^{-b}\,y'(\tau)d\tau = f(\tau) \qquad (0<b<1)$$

é conhecida como ***equação integral de Abel*** , onde a variável dependente agora é y'. Mostre que sua solução é dada por

$$y(t)=y(0)+\frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(1-b)}\,t^{b-1} * f(t)$$

quando f satisfaz certas condições de continuidade.

Exercício 20: Conforme sabemos, a transformada de Laplace de t^n é dada por

$$\mathscr{L}[t^n](s)=\int_0^\infty t^n e^{-st}dt=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

De modo que,

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$$

Este resultado levou a uma generalização da *função fatorial* denominada ***função gamma*** denotada por Γ e definida por

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad , \quad x>0.$$

(i) Prove a seguinte propriedade fatorial

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

(ii) Prove que $\Gamma(1)=1$ e consequentemente que $\Gamma(n+1)=n!\,, n=1,2,\ldots$.

(iii) Prove que $\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ e com isso obtenha $(\tfrac{3}{2})!$.

(iv) Prove que $\mathscr{L}[\sqrt{t}](s)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$, $\forall s>0$.

Exercício 21: Os ***polinômios de Laguerre $L_n(t)$*** são definidos por

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \quad , n = 0,1,2,\ldots$$

(i) Mostre que

$$\mathscr{L}[L_n(t)](s) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \quad , \forall s > 0.$$

(ii) Obtenha as seguintes relações de recorrência

$$L_n'(t) = L_{n-1}'(t) - L_{n-1}(t) \quad ; \quad tL_n'(t) = n\left[L_n(t) - L_{n-1}(t)\right]$$

Exercício 22:
(i) Prove que

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen}\sqrt{t}](s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-1/4s} \quad , \forall s > 0.$$

Sugestão: prove que $y(t) = \operatorname{sen}\sqrt{t}$ satisfaz a EDO

$$4ty'' + 2y' + y = 0 \quad , t > 0 \ .$$

e utilize o teorema do valor inicial para comparar o comportamento de pequenos valores de t com grandes valores de s.
(ii) Com isso obtenha que

$$\mathscr{L}[\frac{\cos\sqrt{t}}{t}](s) = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} e^{-1/4s} \quad , \forall s > 0.$$

Exercício 23: Uma partícula de massa m , inicia seu movimento ao longo do eixo-x partindo da origem com velocidade v_0. A única força externa que atua sobre a partícula é um impulso instantâneo p_0 no instante $t=t_0$, na direção do eixo-x. De modo que, o deslocamento $x(t)$ é descrito pela solução do seguinte

$$PVI : \begin{cases} mx'' = p_0\delta(t-t_0) \\ I_0 x = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad 0 < t < +\infty$$

Obtenha a solução e seu gráfico. Verifique que a solução obtida é de fato solução, mostrando que

$$x''(t) = \begin{cases} 0, t \neq t_0 \\ +\infty, t = t_0 \end{cases}$$

Além disso, $x(0) = 0, x'(0) = v_0$ e o momento $mx'(t)$ apresenta um salto p_0 no instante t_0.

Exercício 24: (***Equação de Diferença***)
A *função escada unitária* é definida pelo símbolo [.], sendo que [t]:= maior inteiro menor ou igual a t. Para se obter uma *função escada* com degrau possuindo comprimento h e altura c, basta tomar a função

$$y(t) = c[1+\frac{t}{h}] \qquad (c>0, h>0)\,.$$

Por outro lado,

$$y(t) = [1+\frac{t}{h}] \quad (1)$$

pode ser reescrita como uma ***equação de diferença*** de primeira ordem com uma condição inicial dada por

$$y(t) = \begin{cases} y(t-h)+1 \;, & t \geq 0 \\ 0 \;, & t<0 \end{cases}$$

(a) Utilizando este fato, obtenha a transformada de Laplace de (1).
(b) Mostre que

$$L[[1+\frac{t}{h}]](s) = \frac{1}{2s}(1+\coth\frac{hs}{2})\,.$$

Exercício 25: A função especial ***Integral Seno*** é muito utilizada em ótica:

$$\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \;\;.$$

Calcule sua transformada de Laplace.

Exercício 26: (1) Mostre que

$$L\{J_0'(t)\} = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} - 1$$

(2) Prove que $J_0'(t) = -J_1(t)$ e com isso obtenha que

$$L\{J_1(t)\} = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}\,.$$

(3) Prove que

$$\int_0^t J_0(\tau)J_0(t-\tau)d\tau = \operatorname{sen} t\,.$$

(4) Prove que

$$\int_0^t J_0(\tau)J_1(t-\tau)d\tau = J_0(t) - \cos t\,.$$

Exercício 27: Se na EDO do modelo matemático para um ***servomecanismo*** tivermos

$$c = k = 2I$$

Obtenha o output $\Theta_0(t)$ correspondente a um input constante $\Theta_i(t) = 1\,(t > 0)$, e os compare graficamente. Qual a conclusão que se pode tirar?

Exercício 28: Se na dedução da lei matemática obtida para o ***servomecanismo***, uma componente proporcional ao ângulo acumulado for adicionada as duas componentes relativas ao torque, obtém-se a seguinte EDO

$$I\Theta_o''(t) = -k\Phi(t) - c\Phi'(t) - b\int_0^t \Phi(\tau)\,d\tau$$

onde *b* é uma constante positiva. Assumindo as mesmas condições iniciais, resolva a equação integro-diferencial obtida. Analise o caso especial de um input dado por

$$\Theta_i(t) = at\,,\, t > 0\,.$$

Exercício 29: Utilizando Laplace obtenha a solução limitada do seguinte

$$PVI: \begin{cases} u_t = u_x - u\,,\, x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-3x}, x > 0 \end{cases}$$

Exercício 30: Utilizando Laplace obtenha a solução limitada do seguinte problema de transferência de calor numa barra semi-infinita

$$PVIF: \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} \;\; x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 1\,,\, x > 0 \\ u(0,t) = 0\,,\, t > 0 \end{cases}$$