2ª Lista: MTM146: Prof. Paulo Magalhães:

Exercício 1: Obter as soluções reais das seguintes equações:

(1) $(x - iy)(a - ib) = i^5$, onde $|a| \neq |b|$.

(2) $\frac{1}{z-i} + \frac{2+i}{1+i} = \pi$.

Exercício 2: Represente os seguintes números na forma polar:

(1) $z = -\pi$ (2) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ (3) $z = 1 - sen\alpha + icos\alpha$

Exercício 3: Represente os seguintes números na forma exponencial:

(1) $z = \pi$ (2) $z = -i$ (3) $z = sen\alpha - icos\alpha, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$

Exercício 4: Ache todos os números complexos $z \neq 0$ tais que:

$$z^{n-1} = \bar{z} .$$

Exercício 5: Prove que o polinômio

$$p(x) = (cos\alpha + xsen\alpha)^n - cosn\alpha - xsen(n\alpha)$$

é divisível por $(x^2 + 1)$.

Exercício 6: Calcule

(1) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$ (2) $(2 - i2)^7$ (3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$ (4) $\frac{\sqrt{1+a^2}+ia}{a-i\sqrt{1+a^2}}$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercício 7: Calcule os valores das raízes

(1) $\sqrt[4]{-1}$ (2) $\sqrt[4]{-i}$ (3) $\sqrt[3]{-1+i}$

Exercício 8: Descreva os conjuntos do plano complexo definidos pelas condições abaixo. Determine a natureza topológica de cada um deles.

(1) $|z| \geq 2$ (2) $\frac{1}{|z|} \geq 1$ (3) $1 < |z| < 2$ (4) $|z - i5| = 3$

(5) $0 \leq Imz \leq 1$ (6) $1 < |z + i| < 2$ (7) $\frac{\pi}{4} < Argz < \frac{\pi}{2}$.

Exercício 9: (Equação complexa de uma curva qualquer)

Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, prove que

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Com isso, se $f(x,y) = 0$ é a equação de uma curva no plano cartesiano para se obter a equação dessa mesma curva no plano complexo basta substituir x e y por seus valores dados acima. Sabendo disso, obtenha a equação complexa das seguintes curvas cartesianas:

(1) Equação da reta: $ax + by + c = 0.$
(2) Equação da circunferência: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2.$
(3) Equação da hipérbole eqüilátera: $xy = 1.$

Exercício 10: Obtenha as curvas cartesianas representadas pelas seguintes equações complexas:

(1) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$ (2) $\text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$ (3) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$ (4) $\text{Re}\,\bar{z}^2 = 1.$

Exercício 11: Seja $D = \mathbb{C}$. Encontre, para cada uma das seguintes funções os pontos onde elas **não são contínuas** (**pontos de descontinuidade**), os pontos onde elas **não possuem um limite**, e os pontos nos quais elas possuem limite, mas não são contínuas:

(i) $f(z) = |z|$ (ii) $f(z) = \frac{|z|}{z}$ (iii) $f(z) = \frac{|z|^2}{z}$ (iv) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

Exercício 12: determine o domínio de definição da seguinte função:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-xt}dt + i\sum_{k=0}^{\infty} y^k$$