3ª Lista: MTM146: Prof. Paulo Magalhães:

1º Exercício: Verifique a analiticidade das seguintes funções, determinando seu domínio de analiticidade;

(i) $f(z) = x^2 - y^2 - 2x + i2y(x-1)$ (ii) $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

(iii) $f(z) = z^2\bar{z}$ (iv) $f(z) = ze^z$ (v) $f(z) = |z|\bar{z}$ (vi) $f(z) = |z|\operatorname{Re}\bar{z}$

2º Exercício: Prove que as seguintes funções são analíticas e calcule suas derivadas;

(i) $\operatorname{sen} z, \cos z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (ii) $\operatorname{tg} z, \sec z : \mathbb{C} - \{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$

(iii) $\operatorname{cotg} z, \operatorname{cossec} z : \mathbb{C} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$

3º Exercício: Prove que as seguintes funções são analíticas e calcule suas derivadas;

(i) $\operatorname{senh} z, \cosh z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (ii) $\operatorname{tgh} z, \operatorname{cotgh} z : \mathbb{C} - \{i(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$

(iii) $\operatorname{cotgh} z, \operatorname{cossech} z : \mathbb{C} - \{ik\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$

4º Exercício: Prove que as seguintes funções não são analíticas em ponto algum;

(i) $f(z) = x^2y^2 + i2x^2y^2$ (ii) $f(z) = e^y(\cos x + i\operatorname{sen} x)$ (iii) $f(z) = e^{xy} - e^{-xy} + ixy$

5º Exercício: Prove que as **equações de Cauchy-Riemann** são equivalentes a

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}}$$

Onde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

6º Exercício: Encontre todas as soluções das seguintes equações;

(i) $\cos z = 4$ (ii) $\operatorname{sen} z = 2i$ (iii) $2ie^{iz} = \operatorname{sen} z$ (iv) $\operatorname{senh} z = 2i$ (v) $\cosh z = 4i$

(vi) $e^z = -\sqrt{3} + i3$ (vii) $e^z + 6e^{-z} = 5$ (viii) $e^{3z-4} = -1$