4ª Lista: MTM125: Prof. Paulo Magalhães:

1. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos de funções é ***l.i.*** em $C^1(I:R)$:
$(i)\, 1, x, x^2, ..., x^n$ em qualquer intervalo. $(ii)\, \ln x, x\ln x$ em $I =]0,+\infty[$.

2.(i) Seja $f \in C^1(]\alpha,\beta[:R),\ f \neq 0$. Mostre que $f(x)$ e $xf(x)$ são ***l.i.*** em $C^1(]\alpha,\beta[:R)$.
(ii) Seja $f \in C^1(]\alpha,\beta[:R)$ tal que *f* é ímpar e $f(0) = f'(0) = 0$. Mostre que

$$W[f,|f|](x) = 0, \forall x \in [-\alpha,\alpha],$$

mas que *f* e $|f|$ são ***l.i.*** em $C^1(]-\alpha,\alpha[:R)$, a menos que $f \equiv 0$.

3. Sejam u_1, u_2 soluções ***l.i.*** da EDO

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Expresse os coeficientes $a_1(x), a_2(x)$ como funções de u_1, u_2. Utilize esse resultado para obter uma EDO linear homogênea de 2ª ordem cujo conjunto das soluções possui como conjunto fundamental as seguintes funções:
$(i)\, x, xe^x.$ $(ii)\, \text{sen}\, x, \cos x.$ $(iii)\, x, x^2.$ $(iv)\, x, \ln x.$

4. Obter o Wronskiano das soluções y_1, y_2 das EDO's, que satisfazem as condições iniciais dadas:
$(i)\, t^2y'' + ty' + (1+t^2)y = 0$; $y_1(1) = 0, y_1'(1) = 1, y_2(1) = y_2'(1) = 1.$
$(ii)\, y'' - (\text{sen}\, x)y' + 3(tgx)y = 0$; $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1.$

5. Obtenha uma EDO à coeficientes constantes cuja solução geral é dada por:
$(i)\, (c_1 + c_2x)e^{-3x}.$ $(ii)\, e^t(c_1\cos\sqrt{2}t + c_2\,\text{sen}\,\sqrt{2}t).$ $(iii)\, c_1e^{-x} + c_2e^x + x + 4.$

6. Mostre que a solução geral da EDO:

$$\left[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)I\right]y = 0,$$

pode ser escrita na forma ***amplitude-fase*** :

$$y(t) = c_1e^{at}\cos(bt + c_2), c_i \in R.$$

7. Dada a EDO $L[y](t) = 2t^2y'' + 3ty' - y = 0$ (*)

(a) Mostre que $y_1(t) = \sqrt{t}, y_2(t) = 1/t$ são soluções de (*) em $]0,+\infty[$.
(b) Calcule $W[y_1, y_2](t)$. O que acontece quando $t \to 0^+$?
(c) Determine se $y_1(t), y_2(t)$ formam um conjunto fundamental para (*) em $]0,+\infty[$.
(d) Resolva o seguinte

$$PVI: \begin{cases} L[y](t) = 0\ ,\ 0 < t < +\infty \\ y(1) = 1, y'(1) = -1 \end{cases}$$

4ª Lista: EDO: Prof. Paulo: 2000/2:

8. Dada a EDO $y'' + ty' + y = 0 \;\;,\;\; -\infty < t < +\infty.$ (*)

(a) Mostre que $y_1(t) = e^{-t^2/2}, y_2(t) = e^{-t^2/2}\int_0^t e^{s^2/2}ds$ são soluções de (*).

(b) Mostre que y_1, y_2 formam um conjunto fundamental para (*).

(c) Resolva o seguinte

$$PVI: \begin{cases} y'' + ty' + y = 0 \;,\; -\infty < t < +\infty \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

9. Sejam $y_1(t), y_2(t)$ soluções da EDO : $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, -\infty < t < +\infty$, tais que $y_1(0) = 3, y_1'(0) = 1, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 1/3$. Prove que $y_1(t), y_2(t)$ são ***l.d.*** em $-\infty < t < +\infty$.

10. Sejam $y_1(t), y_2(t)$ soluções da equação de ***Bessel de ordem n***

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0$$

no intervalo $0 < t < +\infty$, com $y_1(1) = 1, y_1'(1) = 0, y_2(1) = 0, y_2'(1) = 1$. Calcule $W[y_1, y_2](t)$.

11. Determine a solução geral :

(1) $y'' + 4y = 0.$ (2) $3y'' - 5y' + 2y = 0.$ (3) $y'' - 2y' = 0.$ (4) $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0.$

(5) $y'' - y = 0.$ (6) $6y'' - 7y' + y = 0.$ (7) $y'' - 3y' + y = 0.$ (8) $3y'' + 6y' + 2y = 0.$

12. Resolva os seguintes PVI's:

(1) $\begin{cases} y'' + 2y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 2\sqrt{2} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2y'' + 4y' + 13y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = -2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y'' - \sqrt{2}y' + y = 0 \\ y(0) = \sqrt{2}, y'(0) + 0 \end{cases}$

---------- ☯ ----------