4ª Lista: MTM146: Prof. Paulo Magalhães:

1⁰ Exercício: Identifique as curvas ou arcos dados, utilize o software *Mathematica* para fazer os gráficos e determine as respectivas orientações.

$(i)\ z = 3t + it^2; -\infty < t < +\infty.$ $\qquad (ii)\ z = r(\cos t + i\,\text{sen}\, t); -\frac{\pi}{4} \le t \le \pi, r > 0.$

$(iii)\ z = \frac{1}{t} + it; 1 \le t < +\infty.$ $\qquad (iv)\ z = t + i\frac{2}{t}; -\infty < t < 0.$

$(v)\ z = t + i\sqrt{1-t^2}\ ; -1 \le t \le 1.$ $\qquad (vi)\ z = t - i\sqrt{1-t^2}\ ; -1 \le t \le 1.$

2⁰ Exercício: Calcule a integral de $|z|$ nos seguintes casos:

(*i*) Ao longo do semicírculo $z=re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi/2$.
(*ii*) Ao longo do semicírculo $z=re^{i\theta}$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

3⁰ Exercício: Calcule a integral

$$\int_C \sqrt{z}\, dz$$

nos seguintes casos

(*i*) $C : z=re^{i\theta}$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.
(*ii*) $C : z=re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

4⁰ Exercício: Calcule a integral de $x^2 - y^2 + i(x-y^2)$ ao longo do segmento que une a origem ao ponto $3+2i$.

5⁰ Exercício: Calcule a integral

$$\int_0^{2+i} (y - x^2)dz$$

(*i*) Ao longo do eixo $y=0$ e da reta $x=2$.
(*ii*) Ao longo do eixo $x=0$ e da reta $y=1$.

6⁰ Exercício: Calcule a integral

$$\int_C Logz\, dz$$

onde $C:=\{z=re^{i\theta}\ ;\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

7⁰ Exercício: Sem calcular as integrais , mostre que

$$\left|\int_1^{1+i} \frac{z+2}{z} dz\right| \le 3 \quad , \quad \left|\int_1^{1+i} \frac{1}{z} dz\right| \le 2,$$

onde as integrações são ao longo do segmento [1,1+i].

8^0 Exercício: Demonstre que

$$\int_{C_\varepsilon} (Log z)^c\, dz \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0,$$

onde $C_\varepsilon = \{ z = \varepsilon e^{i\theta} ;\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$ e c é um número real qualquer.

9^0 Exercício: Mostre que

$$\int_C z^c\, dz = \frac{z_0^{c+1}}{c+1}[e^{(c+1)2\pi i} - 1]$$

onde

$$z_0 = re^{i\theta_0} \text{ e } C = \{z = re^{i\theta}; \theta_0 \le \theta \le \theta_0 + 2\pi\}.$$

10^0 Exercício: Prove que se $f(z)$ é contínua na origem, então

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon\, e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0).$$

11^0 Exercício: Demonstre que

$$\int_C z^n\, dz = 0$$

onde n é um inteiro positivo e C qualquer contorno fechado.

12^0 Exercício: Mostre que

$$\int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad \text{e} \quad \int_C \frac{1}{z^n} dz = 0,$$

onde $C = \{z = re^{i\theta} ;\ r > 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$, e n é um inteiro ≥ 2.

13^0 Exercício: Mostre que

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\, dz = 0$$

onde n é um inteiro positivo e C é qualquer contorno envolvendo o ponto $z = a$ uma vez no sentido positivo.

14^0 Exercício: Calcule

$$\int_{-i}^{-1} \frac{1}{z} dz$$

ao longo de qualquer contorno que não passe pelo terceiro quadrante.

15^0 Exercício: Calcule a integral

$$\int_C \frac{z}{3z^2+7}\,dz$$

onde C é qualquer contorno ligando $e^{-i\pi/4}$ a $e^{i\pi/4}$ e inteiramente contido no semiplano IRez>0.

16^0 Exercício: Use a fórmula de Cauchy para calcular as integrais

(i) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^2+1}{z+2}\,dz$ $\qquad (ii)$ $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{2z+i}\,dz$ $\qquad (iii)$ $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{Log(z+5)}{z^2-2iz+3}\,dz$

Sugestão: ponha os integrandos na $f(z)/(z-z_0)$.

17^0 Exercício: Calcule as integrais

(i) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos(z^2+3z-1)}{(2z+3)^2}\,dz$ $\qquad (ii)$ $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^2+z+i}{(4z-i)^3}\,dz$

18^0 Exercício: Mostre que as funções $\operatorname{sen}\frac{1}{z}$ e $\cos\frac{1}{z}$ são analíticas em todo $z \neq 0$ e que $z=0$ é um ponto singular essencial. Calcule os respectivos resíduos nesse ponto.

19^0 Exercício: Obtenha os resíduos das seguintes funções nos seus pontos singulares

(a) $\dfrac{z+1}{z-1}$ $\qquad$ (b) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ $\qquad$ (c) $\dfrac{\cos z}{(z-z_0)^2}$ $\qquad$ (d) $z^3\cosh\dfrac{1}{z^2}$ $\qquad$ (e) $\dfrac{\operatorname{sen}(z^2)}{z^5}$

20^0 Exercício: Calcule

$$\oint_{|z|=5} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$$

21^0 Exercício: Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

22⁰ Exercício: Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} e^{-m} \quad , \; m > 0.$$

23⁰ Exercício: Prove que se $\gamma > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}\,dz = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}t\cos t & , t \geq 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}$$

De modo que, quando $t \geq 0$ o lado esquerdo representa $\mathcal{L}^{-1}[(s^2+1)^{-2}]$.

24⁰ Exercício: Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right]$$

usando resíduos.

25⁰ Exercício : Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right]$$

onde $0 < x < 1$.

26⁰ Exercício: Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\operatorname{senh} xs}{s^2\cosh as}\right]$$

onde $0 < x < a$.

27⁰ Exercício: Prove que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\cosh s}\right] = 1 - \frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2} - \ldots\right).$$

28⁰ Exercício: Prove que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3\operatorname{senh} as}\right] = \frac{t(t^2-a^2)}{6a} - \frac{2a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{a}.$$

29⁰ Exercício: Prove que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)(1+e^{-2as})}\right] = \frac{\operatorname{sen}\omega(t+a)}{2\omega} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi t/2a}{\omega^2-(2n-1)^2\pi^2/4a^2}$$