$5^{\underline{a}}$ Lista : EDO : Prof. Paulo Magalhães:

1. A EDO $$t^2y'' + \alpha t y' + \beta y = 0 \qquad (E)$$
é conhecida como a ***equação de Euler*** . Observe que t^2y'', ty', y são múltiplos de t^r se $y = t^r$. Isto sugere que tentemos $y(t) = t^r$ como solução de (E). Mostre que isto de fato acontece se só se:
$$p_E(r) = r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0.$$

2. Determine a solução geral da EDO: $t^2y'' + 5ty' - 5y = 0 \ , \ 0 < t < +\infty$.

3. Resolva o $PVI: \begin{cases} t^2y'' - ty' - 2y = 0 \ , 0 < t < +\infty \\ y(1) = 0, y(1) = 1 \end{cases}$

4. Na EDO (E) , já sabemos que $y_1(t) = t^r$ é uma solução se $p_E(r) = 0$. Supondo que
$$(\alpha - 1)^2 = 4\beta$$
mostre que
$$y_2(t) = t^{(1-\alpha)/2} \ln t$$
é outra solução de (E). Determine se $y_1(t), y_2(t)$ formam um conjunto fundamental.

5. Determine a solução geral da EDO: $t^2y'' + 3ty' + y = 0 \ , 0 < t < +\infty$.

6. Resolva o $PVI: \begin{cases} t^2y'' - ty' + y = 0 \ , 0 < t < +\infty \\ y(1/2) = 3^{\sqrt{2}}, y'(1/2) = 2^{\sqrt{3}} \end{cases}$

7. Na EDO (E) seja $r_1 = \lambda + i\mu$ uma raiz complexa de $p_E(r) = 0$.

(i) Mostre que
$$t^{\lambda + i\mu} = t^\lambda e^{i\mu \ln t} = t^\lambda [\cos(\mu \ln t) + i\,\mathrm{sen}(\mu \ln t)]$$
é uma solução complexa de (E).

(ii) Mostre que
$$y_1(t) = t^\lambda \cos(\mu \ln t) \ , \ y_2(t) = t^\lambda\, \mathrm{sen}(\mu \ln t)$$
são soluções reais de (E). Elas formam um conjunto fundamental ?

8. Determine a solução geral da EDO: $t^2y'' + ty' + y = 0 \ , 0 < t < +\infty$.

9. Resolva o $PVI: \begin{cases} t^2y'' + 2ty' + 2y = 0 \ , \ 0 < t < +\infty \\ y(1/\sqrt{2}) = \sqrt[3]{5}, y'(1/\sqrt{2}) = \sqrt[5]{3} \end{cases}$

10. Sejam $a, b, c > 0$. Prove que toda solução da EDO : $ay'' + by' + cy = 0$ tende a zero quando $t \to +\infty$.

5ª Lista: EDO: Prof. Paulo Magalhães:

11. Sabendo que a EDO

$$ty'' - (1+3t)y' + 3y = 0$$

possui uma solução da forma e^{ct}, determine a solução geral.

12. Obtenha a solução geral :

$(a) y''' + 5y'' - 8y' - 12y = 0$. $(b) y^{(v)} + 6y^{(iv)} + 15y''' + 26y'' + 36y' + 24y = 0$. $(c)(D^4 + I)y = 0$.
$(d) y''' - y'' - 2y' = 0$. $(e) y''' - y' = 0$. $(f)(x^2D^2 - 2I)y = 0$. $(g) y^{(iv)} - y'' = 0$.

13. Obtenha operadores diferenciais lineares que destruam as funções abaixo:

$(a) x^2e^{x+1}$. $(b) x^2e^x \operatorname{sen}^2 x$. $(c) x(1+2x)\operatorname{sen} x$. $(d) 3 + 4x - xe^{-x}$.

14. Mostre que o Wronskiano das funções $e^{k_1x}, e^{k_2x}, ..., e^{k_nx}$ é a função:

$$e^{(k_1+k_2+...+k_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Este é o determinante de Vandermonde. Quando ele se anula?

15. Seja $p(x) \in P_n$ e seja $L = p(D)$. Prove que : $L[e^{\alpha x}](x) = p(\alpha)e^{\alpha x}$. Use esse fato para mostrar que para todo operador diferencial linear à coeficientes constantes L, tem-se que

$$L[e^{\alpha x}](x) = 0 \Leftrightarrow (D - \alpha I) \text{ é fator de } L.$$

16. Obtenha a solução geral:

$(a) y'' + 3y = t^3 - 1$. $(b) y'' + 4y' + 4y = te^{\alpha t}$. $(c) y'' + 2y' + y = e^{-t}$. $(d) y'' + 5y' + 4y = t^2e^{7t}$.
$(e) y'' - 6y' + 9y = (3t^7 - 5t^4)e^{3t}$. $(f) y'' - 2y' + 5y = 2\cos^2 t$. $(g) y'' + y' + 4y = t^2 + (2t+1)(1+\cos t)$.
$(h) y'' + y' - 6y = te^{2t} + \operatorname{sen} t$.

17. (i) Seja $L[y](t) = y'' - 2ry' + r^2y$. Mostre que $L[e^{rt}v](t) = e^{rt}v''$.

(ii) Use isso para obter a solução geral da EDO: $y'' - 6y' + 9y = t^{3/2}e^{3t}$.

18. (i) Mostre que $\cos^3 wt = \dfrac{1}{4}\operatorname{Re}(e^{3wti} + 3e^{wti})$.

(ii)Obtenha a solução geral da EDO: $10y'' + 0{,}2y' + 1000y = 5 + 2\cos^3(10t)$.

19. Obtenha a função de Green para os operadores diferenciais dados:

$(a)(D^2 + aI)$. $(b)(D^2 - D + \alpha I)$. $(c)(x^2D^2 - 2xD + 2I)$. $(d)[(1-x^2)D^2 - 2xD]$.

---------- ☯ ----------