6ª Lista: MTM125: Prof. Paulo Magalhães:

1. Obtenha a transformada de Laplace das seguintes funções:

(i) $te^t f'(t)$. (ii) $t^3 \cos 3t$. (iii) $te^t \int_0^t \eta \frac{d}{d\eta}(e^\eta \operatorname{sen} \eta) d\eta$. (iv) $|\operatorname{sen} t|$.

2. Obtenha a transformada de Laplace do seguinte sinal:

3. Obtenha a transformada de Laplace inversa das seguintes funções:

1) $\frac{3}{s^2+4}$. 2) $\frac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$. 3) $\frac{1}{(s-a)^n}$. 4) $\frac{s^2}{s^3+a^3}$. 5) $\frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}$.

6) $\frac{e^{-s}}{s^4+1}$. 7) $\frac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}$. 8) $\frac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$. 9) $\ln \frac{s+1}{s+2}$.

4. Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes PVI's:

1) $\begin{cases} y''+\omega^2 y = \cos 2t \ , \ \omega^2 \neq 4 \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y''+2y'+3y = t \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} y''-y = 10 \operatorname{sen} 2t \\ I_0 y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

4) $\begin{cases} y''+4y'+4y = \begin{cases} 0, 0 \le t \le 2 \\ e^{-(t-2)}, t > 2 \end{cases} \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$; 5) $\begin{cases} y'+2y+\int_0^t y(s)ds = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t \le 2 \\ 0, & 2 < t < \infty \end{cases} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{d^4 y}{dt^4} + y = \begin{cases} 0, 0 \le t \le 1 \\ t-1, t > 1 \end{cases} \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$; 7) $\begin{cases} y'''-y''+4y'-4y = -3e^t + 4e^{2t} \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$

5. Sabemos que

$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \quad , \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

Supondo que a transformada de Laplace da série pode ser calculada termo a termo, verifique que

$$\mathscr{L}[\operatorname{sen} t](s) = \frac{1}{s^2+1} \quad , s > 1 \ .$$

6. Expansão de Heaviside: Se $\quad F(s) = \dfrac{p(s)}{q(s)}$

Onde $q(s)$ é um polinômio de grau n com raízes distintas $r_1, \ldots, r_n$ e $p(s)$ é um polinômio de grau menor que n , então é possível mostrar pelo método das frações parciais que

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_1}{s-r_1} + \cdots + \frac{A_n}{s-r_n} \qquad (*).$$

Mostre que;

(i) $A_k = \dfrac{p(r_k)}{q'(r_k)} \quad , k = 1, \ldots, n$. (Sugestão: multiplique (*) por $(s - r_k)$ e faça $s \to r_k$.

(ii) $\mathscr{L}^{-1}[F(s)](t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{p(r_k)}{q'(r_k)} e^{r_k t}$.

7. Obtenha a transformada de Laplace das seguintes funções:

1) $f(t) = H_1(t) + 2H_3(t) - 6H_4(t)$; 2) $f(t) = (t-3)H_2(t) - (t-2)H_3(t)$;

3) $f(t) = t - H_1(t)(t-1), t \geq 0$.

8. Função Impulso Unitário (Delta de Dirac): Resolva os seguintes PVI's:

1) $\begin{cases} y'' + 4y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi) \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-5) + H_{10}(t) \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = \operatorname{sen} t + \delta(t-3\pi) \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} y'' + y = \delta(t-2\pi)\cos t \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

9. Convolução: Obtenha a transformada de Laplace das seguintes funções:

1) $f(t)=\int_0^t (t-\eta)^2 \cos 2\eta d\eta$. 2) $f(t)=\int_0^t e^{-(t-s)} \operatorname{sen} s ds$.

3) $f(t)=\int_0^t (t-\lambda)e^{\lambda} d\lambda$. 4) $f(t)=\int_0^t \operatorname{sen}(t-\xi)\cos\xi d\xi$.

10. Usando convolução, obtenha a transformada de Laplace inversa das seguintes funções:

1) $F(s)=\dfrac{1}{s^4(s^2+1)}$; 2) $F(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s^2+a^2)}$; 3) $F(s)=\dfrac{G(s)}{s^2+1}$.

11. Resolva os PVI's, obtendo as soluções na forma de convolução:

1) $\begin{cases} y''+\omega^2 y = f(t) \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} y''+2y'+2y = \operatorname{sen}\alpha t \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

3) $\begin{cases} y''+y'+\frac{5}{4}y = 1-H_\pi(t) \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} y''+3y'+2y = \cos\alpha t \\ I_0 y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

12. A equação integral nuclear convolutiva

$$y(t)+\int_0^t g(t-\xi)y(\xi)d\xi = f(t)$$

É conhecida como ***equação integral de Volterra.*** Supondo que g e f possuem transformada de Laplace, resolva essa equação.

13. Considere a equação integral de Volterra:

$$y(t)+\int_0^t (t-\xi)y(\xi)d\xi = \operatorname{sen} t \text{ . (EIV)}$$

1) Resolva essa equação.

2) Derivando duas vezes mostre que a solução $y(t)$ de (EIV) é solução do seguinte

$$PVI: \begin{cases} y''+y = -4\operatorname{sen} 2t \\ y(0)=0, y'(0)=2 \end{cases} .$$

3) Resolva o *PVI* e comprove que a solução é a mesma que a obtida em 1).

---------- ☺ ----------