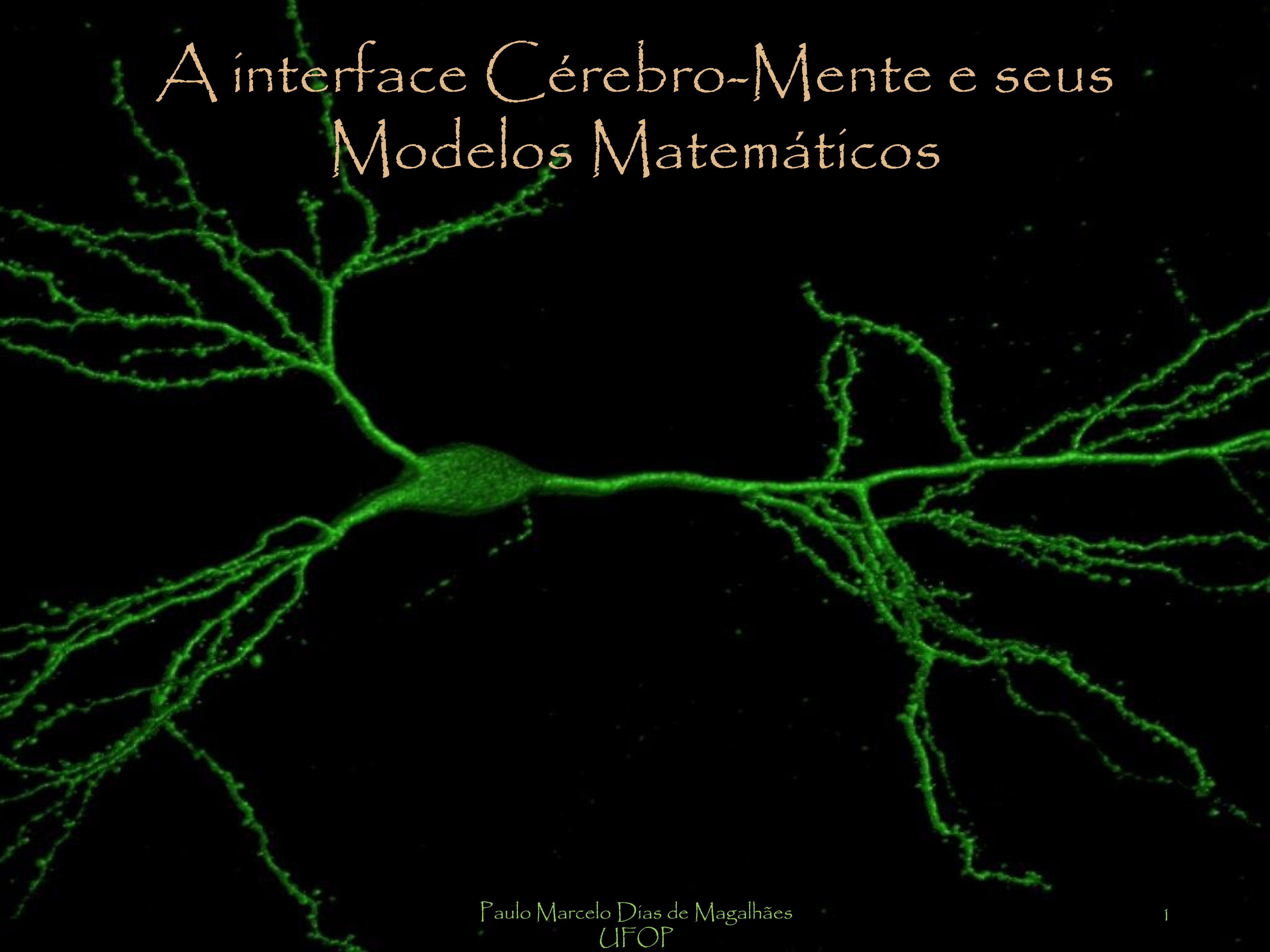
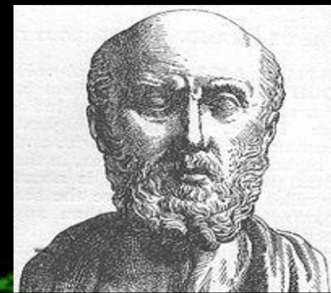
A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos



Paulo Marcelo Dias de Magalhães
UFOP



"O homem deveria saber que do cérebro, e somente do cérebro, surgem nossos prazeres, alegrias, risadas e frivolidades, tanto quanto nossos pesares, sofrimentos e lágrimas. Através dele nós pensamos, vemos, ouvimos e distinguimos o feio do belo, o bem do mal ... É a mesma coisa que nos faz delirar, sentir medo, sonhar, cometer erros e atos que são contrários aos nossos hábitos"

Hipócrates, século V- a.c.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos

- O problema Cérebro-Mente inicia-se propriamente com René Descartes que através do Discurso do Método coloca, em 1637,o problema Corpo-Alma. A partir daí, com o desenvolvimento vertiginoso da Medicina , particularmente da Neurologia, da Psicologia e da Matemática, principalmente nos séculos XIX e XX , começam a surgir, em meados do século XX,as primeiras abordagens matemáticas do Problema Cérebro-Mente.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos

- Excetuando-se raríssimas exceções, essas abordagens objetivavam, quase que exclusivamente, descrever o funcionamento do cérebro, a dinâmica eletro-química produzida pelos neurônios, seja através de modelos para aglomerados de neurônios, seja através de modelos para um único neurônio. Podemos afirmar que os Modelos Matemáticos existentes abordam o Problema Cérebro-Mente pelo "lado" neural, através de neurônios biológicos ou formais.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Discretos

- Parece que o primeiro modelo de redes neurais foi proposto por W. S. McCulloch – W. H. Pitts, [1] , em 1943. Eles aplicaram lógica simbólica para descre ver o que redes de neurônios "formais" poderiam fazer. Neurônios formais são simples interruptores lógicos ocorrendo a intervalos discretos regulares. Eles pro varam que todos processos que podem ser descritos através de um número finito de expressões simbólicas podem ser representadas em redes neurais formais.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

- O primeiro Modelo Matemático para a geração e propagação do estímulo nervoso (potencial de ação) ao longo do axônio de um neurônio biológico (de uma Lula) foi proposto por A. L. Hodgkin-A. F. Huxley [2], em 1952. Este trabalho abordou os processos iônicos que ocorrem na membrana do axônio, através dos quais um neurônio produz tais potenciais. Hodgkin-Huxley obtiveram o seguinte sistema de equações diferenciais:

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

500
J. Physiol. (1952) 117, 500-544

A QUANTITATIVE DESCRIPTION OF MEMBRANE CURRENT AND ITS APPLICATION TO CONDUCTION AND EXCITATION IN NERVE

BY A. L. HODGKIN AND A. F. HUXLEY
From the Physiological Laboratory, University of Cambridge

(Received 10 March 1952)

This article concludes a series of papers concerned with the flow of electric current through the surface membrane of a giant nerve fiber (Hodgkin, Huxley & Katz, 1952; Hodgkin & Huxley, 1952 a-c). Its general object is to discus the results of the preceding papers (Part I), to put them into mathematical form (Part II) and to show that they will account for con-duction and excitation in quantitative terms (Part III).

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

$$
(HH):\begin{cases}
\dfrac{dv}{dt} = -\bar{g}_{Na} m^3(v)h(v)(v - v_{Na}) - \bar{g}_K n^4(v)(v - v_K) - \bar{g}_L(v - v_L) \\
\dfrac{dm}{dt} = 0{,}1\dfrac{(v+25)}{(e^{(v+25)/10} - 1)}(1-m) - 4e^{v/18}m \\
\dfrac{dh}{dt} = 0{,}07e^{v/20}(1-h) - \dfrac{h}{e^{(v+30)/10} + 1} \\
\dfrac{dn}{dt} = 0{,}01\dfrac{(v+10)}{(e^{(v+10)} - 1)} - 0{,}125e^{v/80}n
\end{cases}
$$

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

Onde

$v(x,t)$= desvio da voltagem na membrana em relação ao repouso.

$m(v)$= variável responsável pela ativação dos Na^+.

$h(v)$= variável responsável pela desativação dos Na^+.

$n(v)$= variável responsável pela ativação dos K^+.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

O modelo de Hodgkin-Huxley apresenta uma caixa-preta uma vez que as variáveis $m(v),h(v),n(v)$ são hipo téticas, representando aglomerados de proteínas que devem atuar em conjunto como "portões" abrindo ou fechando os canais de íons da membrana do axônio.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

- O primeiro Modelo Matemático abordando o comportamento de uma massa de neurônios biológicos aleatoriamente localizados e com uma densidade de volume uniforme, supostamente neurônios do córtex, foi proposto por R. L. Beurle,[3], em 1956. Nesse trabalho, Beurle define as seguintes variáveis principais:

$\xi(x)$=nº médio de sinapses de todos os neurônios em um plano infinito para um único neurônio a uma distância x.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

$\chi(x)$=percentual de excitação produzido por um neurônio que permanece até um tempo *t* após ele tornar-se ativo.

$F(x,y,z,t)$=percentual de neurônios tornando-se ativos por unidade de tempo (taxa de disparo ou "atividade").

$\tilde{N}(x,t)$=valor médio da excitação integrada.

Beurle considera apenas a variação da atividade na direção x, sendo F invariante em qualquer plano *y*-z.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

De modo que, $F(x,y,z,t)=F(x,t)$ e $F(X,t)\xi(x-X)dX$ será a taxa média de impulsos chegando em um único neurônio no plano y-z ,determinado pelo neurô nio x , de neurônios tronando-se ativos a uma taxa F em um plano de espessura dX passando por X. Portanto, a convolução

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(X,t)\xi(x-X)dX$$

fornece a taxa média de impulsos chegando no neurô nio x no instante t de todos os outros neurônios.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

Já a convolução

$$\tilde{N}(x,t) = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} F(X,T)\xi(x-X)\chi(t-T)\,dX\,dT$$

fornece o valor médio da excitação integrada para os neurônios no plano x. A partir dessas duas equações Beurle consegue caracterizar a ativação dos neurô nios como uma *travelling wave*. Entretanto, seu trabalho só considera massas de neurônios excitató rios. Trata-se evidentemente de um modelo não-local.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

- Em 1961, R. FitzHugh,[4], propôs uma simplificação do modelo de Hodgkin-Huxley, através de uma modificação da equação diferencial não-linear proposta por B. Van der Pol ,[5],em 1926, para fenômenos apresentando relaxação-oscilação. Sua proposta se baseia no argumento de que uma projeção apropriada do espaço de fase 4-dimensional (HH) sobre um plano apresenta um comportamento qualitativo similar ao plano de fase do seu modelo.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

O modelo de FiztHugh é dado pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = c(y + x - \frac{1}{3}x^3 + z) \\ \dot{y} = -(-x + by - a)/c \end{cases}$$

onde $1-2(b/3)<a<1$, $0<b<1$, $b<c^2$, z corresponde a estímulo na membrana no modelo (HH). O ponto fraco do argumento de FiztHugh é que o plano *(u,w)* obtido através das "projeções" *(v,m)* –>*u* , e *(n,h)* –>*w* , do espaço-de-fase *(v,m,h,n)* do modelo (HH), não é difeomorfo ao plano-de-fase *(x,y)* ,pois não é um plano -de-fase !

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

- Em 1962, Nagumo, Arimoto e Yoshizawa,[6], introduziram a dependência espacial no modelo de FitzHugh, obtendo seguinte sistema:

$$(FN):\begin{cases} v_t = v_{xx} - f(v) + r \\ r_t = \varepsilon(v + a - br) \end{cases}$$

onde *v* é a voltagem na membrana, *r* é uma variável de recuperação e *f(v)* é um polinômio cúbico ou uma apro_ximação linear por partes.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

- Na década de 60 , J. S. Griffith,[7], em 1963, propôs um modelo no qual a atividade neural é representada como um campo clássico ψ produzido pelos neurônios do córtex . É obtido que ψ satisfaz uma equação diferencial parcial moderadamente não - linear , uma vez que a não-linearidade é restrita ao comportamento das fontes do campo, enquanto o próprio campo neural ψ satisfaz a uma EDP linear.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

A EDP obtida,supondo isotropia, é a seguinte;

$$\left(\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi-\nabla^2\psi=4\pi F(x,y,z,t)$$

onde β>0 e ν é a velocidade de propagação da excita ção neural, sendo que a não-linearidade está oculta na fonte *F*:

$$F(x,y,z,t)=f(\phi(x,y,z,t))$$

onde

$$\phi(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,y,z,t+\varepsilon)i(\varepsilon)d\varepsilon$$

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

Sendo que *f* é a taxa de disparo dos neurônios e, em geral é não linear, $i(\theta)$ é o percentual de excitação produzido por um neurônio, $f(\theta)$ e $i(\theta)$ são os análogos de F e $\chi(x)$ considerado por Beurle. Para provar que seu modelo "captura" o de Beurle, Griffith obtém que

$$\psi(\mathbf{r},t)=\int F\left(\mathbf{R},t-\tfrac{1}{v}\left|\mathbf{r}-\mathbf{R}\right|\right)g\left(\left|\mathbf{r}-\mathbf{R}\right|\right)dxdydz$$

onde *g(p)* é nº médio de sinapses de todos os neurônios a uma distância *p*, é a $\xi(x)$ de Beurle.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

- Na década de 70 surgiram vários trabalhos exten dendo o trabalho de Beurle de modo a incluir os dois tipos de neurônios do córtex; excitatórios e inibitórios como também a refratariedade dos neurônios. Os pri meiros foram de H. R. Wilson e J. D. Cowan , [8], em 1972. S. Amari, [9] , em 1975, abordou o proble ma de formação de padrões e campos neurais com ini- bição lateral. A partir dessas contribuições à Teoria do Campo Mental , vários Modelos Matemáticos

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

tem sido utilizados para investigar alucinações visuais (Ermentrout-Cowan, [10], 1979; Bressloff et all, [11], 2001), travelling waves, spirals waves (Ermentrout McLeod, [12], 1993; Pinto - Ermentrout , [13], 2001; Huang et all, [14], 2004).

Na maioria dos modelos para massas de neurônios é assumido que a corrente sináptica de chegada é uma função não-linear da taxa de disparo pré-sináptica. Isso conduz a equações integro-diferenciais do tipo:

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} = -u + \int_{-\infty}^{\infty} f(u(x-y,t))w(y)dy$$

onde *u(x,t)* é o campo neural representando a atividade local de um aglomerado de neurônios na posição *x* e instante *t*, $(f \circ u)$ representa a função taxa de disparo e a força das conexões sinápticas entre neurônios separados por uma distância *y* é dada por $w(y) = w(|y|)$, (assumindo homogeneidade e isotropia espacial).

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Neurais Contínuos

- Como exemplo de um modelo atual utilizando uma abordagem neurológica, mas tentando descrever atividades efetivamente psíquicas, tem-se o trabalho:

Bull Math Biol (2011) 73: 266–284
DOI 10.1007/s11538-010-9572-x

ORIGINAL ARTICLE

Nonlinear Dynamics of Emotion-Cognition Interaction: When Emotion Does not Destroy Cognition?

Valentin Afraimovich · Todd Young · Mehmet K. Muezzinoglu · Mikhail I. Rabinovich

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Mentais Contínuos

- No seu livro; "A Dynamic Theory of Personality", de 1935, o psicólogo Kurt Lewin utiliza conceitos topológicos para caracterizar o Campo Mental que relaciona o estado momentâneo do indivíduo e a estrutura do seu meio ambien_te psicológico.
- Em 1978, M. Robert e M. D. Galatzer-Levy,[15], abor_dam psicanaliticamente a relação entre qualidade e quantida_de, chamando a atenção para a "luta" travada por S. Freud com o problema da qualidade no "Entwurf" de 1895,[16]. Os autores utilizam a Teoria das Catástrofes de Rene Thom.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Mentais Contínuos

- Em 1991, M. G. Moran, [17], propõem utilizar a Teoria do Caos na psicanálise para obter um modelo da Mente de natureza fluídica. Ele conjectura que a Mente pode ser visualizada como um sistema dinâmico não-linear. Ele examina alguns fenômenos clínicos comuns, tais como os sonhos e metodologias de ação em psicanálise.Infelizmente ele não obtém nenhum sis_ tema específico para seu modelo.

A interface Cérebro-Mente e seus Modelos Matemáticos: Modelos Mentais Contínuos

- Em 1999, P.M.D.de Magalhães,[18], obteve um modelo matemático para a metapsicologia proposta por S. Freud em seu "Entwurf" (Projeto para uma Psicologia Científica). O modelo é consequência de uma associação entre os três arquétipos da Física-Matemática caracterizadores dos fenômenos periódicos, dos fenômenos dissipativos e dos fenômenos potenciais, e os três sistemas neurais proposto por Freud.

Referências

[1]W. S. McCulloch-W. H. Pitts: A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, Bull. Math. Biophys. 5, 115-33, (1943).

[2] A. L. Hodgkin-A. F. Huxley: A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, J. Physio. 177,500-44,(1952).

[3] R. L. Beurle: Properties of a mass of cells capable of regenerating pulses, Phil. Trans. Roy. Soc. London, B, 240, 669, 55-94,(1956).

Referências

[4] R. FitzHugh: Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, Biophys. J. 1, 445-66,(1961).

[5]B. Van der Pol: On relaxation oscillations, Phil. Mag. ,2, 978(1926).

[6] J. Nagumo -S. Arimoto - S. Yoshizawa : An active impulse transmission line simulating nerve axon, Proc. IRE 50, 2061-70, (1962).

[7] J. S. Griffith: A field theory of neural nets I: deri vation of field equation, Bull. Math. Bio.25(1963)

Referências

[8] H. R. Wilson - J. D. Cowan: Excitatory and inhi bitory interactions in localized populations of model neurons, Biophys. J. ,12, 1-24(1972).

[9] S. Amari: Homogenous nets of neuron-like elements, Bio. Cyber. 17, 211-20,(1975).

[10] Ermentrout-Cowan: A mathematical theory of visual hallucination patterns, Bio. Cyber. 34, 137-50, (1979).

[11] Bressloff et all: Geometric visual hallucinations, eucli dian symmetry and the functional architecture of striate cortex, Phil. Trans. R. Soc. B 40; 299-330(2001).

Referências

[12]Ermentrout-McLeod:Existence and uniqueness of travelling waves for neural network. Proc. R. Soc. Edin. 123A, 461-78(1993).

[13]Pinto –Ermentrout: Spatially structured activity in synaptically coupled neuronal networks;travelling fronts and pulses. SIAM J Appl. Math. 62, 206-25.(2001).

[14] Huang et all: Spiral waves in disinhibited mamma lian neocortex. J. Neurosc. 24,9897-902(2004).

Referências

[15] M. Robert e M. D. Galatzer-Levy: Qualitative change from quantitative change; mathematical catastrophe theory in relation to psychoanalysis. JAPA, 921-35,(1978).

[16] S. Freud: Project for a Scientific Psychology. Standard Edition, v.1, 281-397, (1895).

[17] M. G. Moran: Chaos theory and psychoanalysis; the fluidic nature of the mind. Int. Rev. Psych-Anal., 18,211-21 (1991).

[18] P. M.D. Magalhães: A mathematical model for Freud's "Project". Revista da Pesquisa & Pós-Graduação, ano 1,vol.1, nº1, 33-37, (1999).

------ ΦΨΩ ------