A Trindade arquetípica da Física-Matemática

Há milênios que os seres humanos perceberam três formas fundamentais de comportamento da natureza.

A Trindade arquetípica da Física-Matemática

- As primeiras caracterizações dessas três formas foram profundamente místicas.
- Um exemplo disso é dado pelas três divindades descritas no Vedas da Índia; Brama (deus da criação), Xiva (deus da destruição) e Vishnu (deus da permanência).

A Trindade arquetípica da Física-Matemática

Brama:

A Trindade arquetípica da Física-Matemática

Xiva (Shiva):

A Trindade arquetípica da Física-Matemática

Vishnu

A Trindade arquetípica da Física-Matemática

- Por outro lado, o homem sempre acreditou na possibilidade de prever o futuro.
- A astrologia é a maior prova dessa crença e pode-se dizer que é o germe da ciência.
- Um mapa astral é o protótipo de um modelo matemático (PVIF).

A Trindade arquetípica da Física-Matemática

- Com o advento do cálculo diferencial e integral, ***três formas fundamentais*** de manifestação dos fenômenos naturais foram equacionadas.
- O primeiro fenômeno natural a ser modelado matematicamente foi o da vibração, ou ***fenômeno ondulatório***.

Arquétipo dos fenômenos ondulatórios

- O primeiro ***fenômeno ondulatório*** a ser matematizado foi o das vibrações de uma corda. Um dos primeiros matemáticos a estudá-lo foi Taylor, em 1713. Em 1746, D'Alembert, utilizando os resultados de Taylor, deduziu a ***equação da corda vibrante***. Foi a primeira equação diferencial parcial a ser estudada.

Arquétipo dos fenômenos ondulatórios

- **O Modelo Matemático deduzido por D'Alembert para pequenas oscilações transversais de uma corda infinita é dado por**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \;, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Arquétipo dos fenômenos ondulatórios

onde

$u_0(x)$ é a posição inicial da corda

$u_1(x)$ é a velocidade inicial da corda

$F(x,t)$ é a força externa atuando na corda

- D'Alembert e Euler obtiveram em 1747 soluções da forma

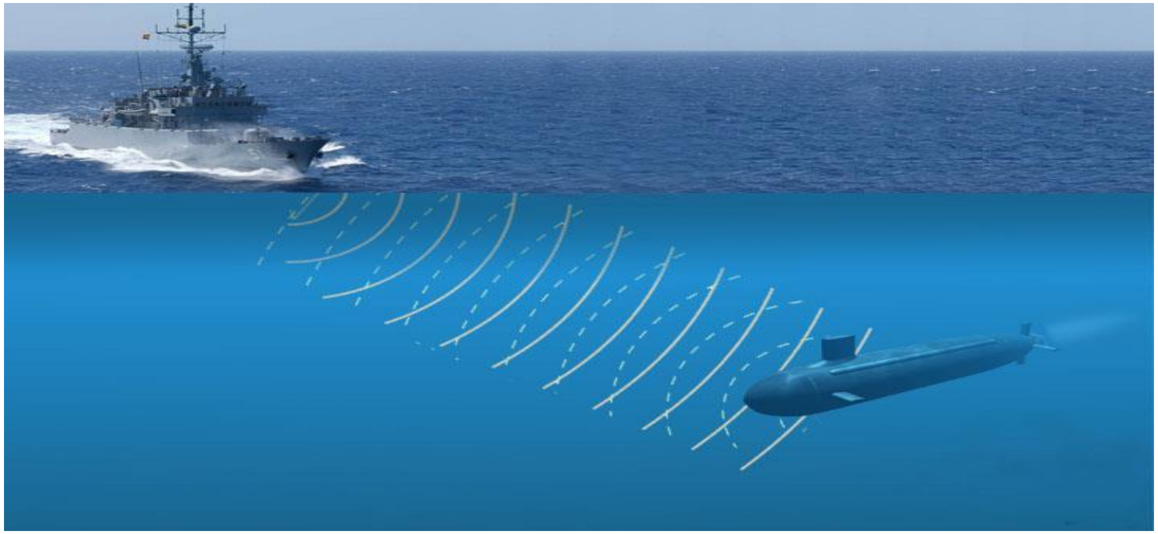
$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Arquétipo dos fenômenos ondulatórios

- Na mesma época, Bernoulli obteve uma solução na forma de uma série de funções seno. Esses dois resultados, aparentemente irreconciliáveis, gerou uma controvérsia que durou mais de vinte anos. Por um lado, Bernoulli argumentava que sua solução deveria implicar na de Euler e D'Alembert. Por outro lado, Euler objetava que se isso fosse verdade então seria possível expandir uma função arbitrária em série de senos. O que, segundo Euler, era absurdo pois nem toda função é ímpar e periódica.

Arquétipo dos fenômenos ondulatórios

- Com isso obteve-se o protótipo dos modelos matemáticos para os *fenômenos ondulatórios* cujas características principais são a periodicidade e a reversibilidade temporal.



Arquétipo dos fenômenos atemporais

- Em 1782, Lagrange,analisando a teoria da gravitação de Newton, introduziu o conceito de ***função potencial*** de um campo gravitacional newtoniano devido a uma distribuição pontual de massas. Em 1783, Laplace obteve que no espaço vazio a função potencial gravitacional V satisfaz a equação diferencial parcial

Arquétipo dos fenômenos atemporais

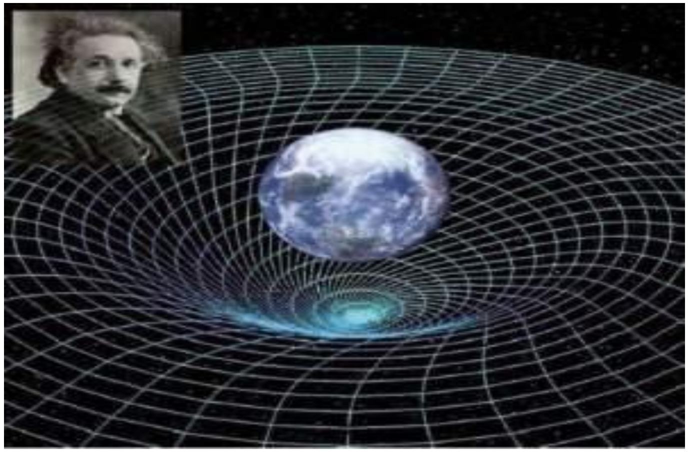
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

- Em 1813, Poisson deduziu a equação válida para uma distribuição de massas com densidade ρ dada como função das coordenadas dos pontos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho$$

Arquétipo dos fenômenos atemporais

- Com isso obteve-se o protótipo dos modelos matemáticos para os ***fenômenos em regime permanente***, cuja descrição só depende de sua posição no espaço, sem depender do tempo, ou seja para os ***fenômenos atemporais***.



Arquétipo dos fenômenos dissipativos

- Em 1822, Fourier apresentou sua obra "La Théorie Analytique de la Chaleur",sobre a transferência de calor, na qual ele consegue o protótipo do modelo matemático para os ***fenômenos dissipativos*** . Esses fenômenos apresentam a característica de serem irreversíveis em relação ao tempo, são fenômenos aonde a seta do tempo se revela. Além desse grande feito, Fourier na sexta seção de sua obra resolve a controvertida questão levantada por Euler e Bernoulli.

Arquétipo dos fenômenos dissipativos

- Na verdade os resultados sobre representação de funções por séries trigonométricas foram obtidos por Fourier em 1807.Esse resultado produziu um efeito extraordinário e durante todo século XIX foi considerado um dos teoremas mais importantes da Análise, principalmente pela sua simplicidade, uma vez que envolve apenas integração termo a termo de uma série. O problema da convergência só foi resolvido em 1829 por Dirichlet.

Arquétipo dos fenômenos dissipativos

- O Modelo Matemático obtido por Fourier para transferência de calor em uma barra de comprimento L possui a seguinte forma

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \ ,0 < x < L, t > 0 \\
u(x,0) = u_0(x) \qquad\qquad ,0 < x < L \\
u(0,t) = T_1(t), u(L,t) = T_2(t), t > 0
\end{cases}
$$

Arquétipo dos fenômenos dissipativos

onde

$u(x,t)$ é a temperatura no ponto x e instante t

$F(x,t)$ é uma densidade de calor interno

$u_0(x)$ é a temperatura inicial da barra

$T_1(t)$ é a temperatura na extremidade $x=0$

$T_2(t)$ é a temperatura na extremidade $x=L$

Alguns Modelos Matemáticos Atuais

- Uma equação importante no estudo dos ***fenômenos de formação de padrões*** associado ao aparecimento de turbulência é a equação de Kuramoto-Sivashinsky relacionada ao fenômeno de turbulência em teoria da combustão

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Alguns Modelos Matemáticos Atuais

- Um sistemas de equações que se tornou o protótipo dos sistemas excitáveis é dado pelo sistema de FitzHugh-Nagumo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(1-u)(a-u) - v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \sigma u - \gamma v \end{cases}$$