EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM:

Conforme a definição vista, uma EDO de 2ª ordem é uma equação da forma

$$\boxed{F(x,y,y',y'')=0} \qquad (1)$$

Esta forma é muito geral, e por isso praticamente intratável. De modo que, nos restringiremos as EDO's normais de 2ª ordem

$$\boxed{y''=f(x,y,y')} \qquad (2)$$

Com a experiência obtida nas EDO's de 1ª ordem, podemos esperar que as de 2ª ordem sejam bem mais difíceis de se resolver. Entretanto, existem duas subclasses de EDO's normais de 2ª ordem que podem ser reduzidos a EDO's de 1ª ordem:

Caso1: $f(x,y,y')=f(x,y')$:

Neste caso, a mudança $z=y'$ reduz (2) a seguinte EDO de 1ª ordem

$$z'=f(x,z)$$

a qual, dependendo da estrutura de $f(x,z)$, pode ser resolvida.

Caso2: $f(x,y,y')=f(y,y')$:

Neste caso, usando que $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$ obtém-se que a mudança $z=y'$ reduz (2) a EDO

$$z\frac{dz}{dy}=f(y,z)\Rightarrow\frac{dz}{dy}=\frac{f(y,z)}{z}$$

a qual, novamente dependendo da estrutura de $f(y,z)/z$, pode ser resolvida.

Excetuando esses possíveis casos, a teoria que se tem só permite resolver EDO's de 2ª ordem muito particulares. As EDO's da forma

$$\boxed{a(t)y''+b(t)y'+c(t)y=F(t)} \qquad (3)$$

Exemplo: A EDO de 2ª ordem mais importante é, sem dúvida, a 2ª Lei de Newton para o movimento *y(t)* de uma partícula de massa *m* que se move sob a ação de uma força *F*:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F(t, y, \frac{dy}{dt})$$

No caso de vibrações mecânicas, obtém-se que a posição *y(t)* da massa *m* satisfaz a EDO

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F(t).$$

No caso de pequenas oscilações de um pêndulo, de massa *m* com uma haste de comprimento L, obtém-se que o ângulo $\theta(t)$ que determina o desvio da posição vertical, satisfaz a EDO

$$mL\theta'' + cL\theta' + m\theta = F(t).$$

Já no caso de um circuito elétrico *RLC*, a carga *Q(t)* do capacitor *C* satisfaz a EDO

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

Se nós observarmos que as principais aplicações da tecnologia nas ultimas décadas envolvem esses três dispositivos, então as EDO's dadas por (3) são de longe as mais importantes!

OBS: Para montarmos um PVI associado a uma EDO do tipo (2) precisaremos de duas condições iniciais. De fato, independentemente do método de resolução utilizado teremos que realizar duas integrações para obtermos *y(t)*. Cada integração dará origem a uma constante arbitrária, o que precisamos é descobrir a estrutura dessas constantes. Para isso, usaremos as EDO's Fundamentais de 2ª ordem.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Introduzindo a variável $z = y'$, obtém-se o sistema $\begin{cases} y' = z & (1) \\ z' = f(x) & (2) \end{cases}$

De (1) obtém-se que

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} z(s)ds \qquad (3)$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{ds}[(s-x)z(s)] = z(s) + (s-x)z'(s) \Rightarrow z(s) = \frac{d}{ds}[(s-x)z(s)] + (x-s)z'(s)$$

Integrando de x_0 até *x*, usando (1) e (2) e substituindo em (3), obtém-se que

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x}\left[\frac{d}{ds}[(s-x)z(s)] + (x-s)f(s)\right]ds$$

ou seja

$$y(x) = y(x_0) + (x-x_0)y'(x_0) + \int_{x_0}^{x}(x-s)f(s)ds\,.$$

De modo que, a estrutura das constantes de integração fica evidente e para obtermos a unicidade de solução precisamos especificar essas constantes através da imposição de duas condições iniciais:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = y_1\,.$$

Generalizando, obtemos a seguinte estrutura para um PVI associado a uma EDO normal de 2ª ordem

$$PVI:\begin{cases} y' = f(x,y), \alpha < x < \beta \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

OBS: Em (3) podemos supor que existe um intervalo $\alpha < t < \beta$ aonde $a(t) \neq 0$. Neste intervalo podemos reduzir (3) a forma

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \qquad (4)$$

Definição1: A EDO (3) (ou (4)) é chamada ***EDO linear de 2ª ordem***, e quando *F(t)=0* (ou *f(t)=0*) diz-se que a EDO é ***homogêneo***, caso contrário é dita ***não-homogênea***.

Para as EDO'S lineares a teoria de existência e unicidade é bem mais simples. De fato, tem-se o seguinte resultado

Teorema: (**T**eorema de **E**xistência e **U**nicidade)

Dado o

$$PVI : \begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \alpha < t < \beta \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Hipótese:

$p(t), q(t), f(t)$ *contínuas em* $\alpha < t < \beta, t_0 \in]\alpha, \beta[$.

Tese:

Existe uma única solução y(t) do PVI definida em <u>todo ponto</u> de $]\alpha, \beta[$.

OBS: Este teorema será extremamente útil na construção da solução geral de (4).

Corolário: Se $f(t) = 0, y_0 = y_1 = 0$, então a única solução do PVI acima é a ***solução trivial*** $y \equiv 0$.

Mudança de Paradigma:

Com o desenvolvimento da álgebra linear surgiu a "abordagem operacional". Passou-se a interpretar uma EDO linear (4) como o resultado da aplicação de uma "função de função" (um ***operador***) denotado pôr $L[y]$, ou seja a EDO (4) passou a ser interpretada como sendo

$$\boxed{L[y](t) = f(t)} \qquad (5)$$

onde, utilizando a notação introduzida pôr G. Bole, tem-se que

$$L = D^2 + p(t)D + q(t)$$

com $D=\dfrac{d}{dt}, D^2=\dfrac{d}{dt}$. De modo que,

$$L[y](t)=(D^2+p(t)D+q(t))y(t)=D^2y+p(t)Dy+q(t)y=y''+p(t)y'+q(t)y\,.$$

Da álgebra linear obteve-se o seguinte conceito

Definição 2: Dados dois espaços vetoriais (reais ou complexos) *V,W*, uma aplicação *T:V→W* é ***linear*** se

$$T(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha T\mathbf{x}+\beta T\mathbf{y}\ \ ,\ \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in V,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\,.$$

De modo que, se nós pudermos encontrar dois espaços vetoriais funcionais reais *V* e *W* tal que *L* possa operar, uma primeira conseqüência do novo enfoque será dada pelo seguinte resultado

Proposição 1: (Princípio da Superposição)

$L:V\to W$ é um operador linear.

Prova: De fato, tem-se que dados $y_1,y_2\in V,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
L[\alpha y_1+\beta y_2](t)&=D^2(\alpha y_1+\beta y_2)(t)+p(t)D(\alpha y_1+\beta y_2)(t)+q(t)(\alpha y_1+\beta y_2)(t)\\
&=D^2(\alpha y_1(t)+\beta y_2(t))+p(t)D(\alpha y_1(t)+\beta y_2(t))+q(t)(\alpha y_1(t)+\beta y_2(t))\\
&=(\alpha y_1(t)+\beta y_2(t))''+p(t)(\alpha y_1(t)+\beta y_2(t))'+\alpha q(t)y_1(t)+\beta q(t)y_2(t)\\
&=\alpha y_1''+\beta y_2''+\alpha p(t)y_1'+\beta p(t)y_2'+\alpha q(t)y_1+\beta q(t)y_2\\
&=\alpha(y_1''+p(t)y_1'+q(t)y_1)+\beta(y_2''+p(t)y_2'+q(t)y_2)\\
&=\alpha L[y_1](t)+\beta L[y_2](t)
\end{aligned}$$

OBS: Falta apenas escolhermos espaços funcionais vetoriais reais para *V* e *W*.

Definição 3: Dado um intervalo $I\subseteq\mathbb{R}$,

$$C^0(I)=\{f:I\to\mathbb{R}: f\ \ contínua\ \ em\ \ I\}$$

Dado *n* inteiro positivo,

$$C^n(I)=\{f:I\to\mathbb{R}: f^{(n)}\in C^0(I)\}$$

Exercício: Prove que $C^n(I)$ é um espaço vetorial real $\forall n \geq 0$.

OBS: Como L é um operador diferencial de segunda ordem e como queremos poder utilizar o **T.E.U.**, os espaços mais gerais que podemos tomar são

$$V = C^2(]\alpha,\beta[) \;\text{ e }\; W = C^0(]\alpha,\beta[) \quad .$$

Objetivo da Mudança de Paradigma:

Resgatar a simplicidade da abordagem algébrica

$$\begin{aligned}
&ay = b \Rightarrow y = a^{-1}b\,,\ \text{se}\ a \neq 0.\\
&\mathbf{A}\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow \vec{\mathbf{y}} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{b}}\,,\text{se}\ \det \mathbf{A} \neq 0.\\
&L[y] = f \Rightarrow y = L^{-1}[f]\,,\text{se}\ (?).
\end{aligned}$$

Equações lineares homogêneas

Iniciaremos com o estudo do núcleo do operador linear L, o que equivale a estudar a EDO homogênea associada a (4)

$$L[y](t) = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (6)$$

Proposição 2: Se y_1, y_2 são soluções de (6), então qualquer ***combinação linear*** de y_1 e y_2, ou seja qualquer função da forma

$$c_1y_1 + c_2y_2 \qquad (7)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ também é solução.

Prova: De fato, tem-se (pelo **princípio da superposição**) que

$$L[c_1y_1 + c_2y_2](t) = c_1L[y_1](t) + c_2L[y_2](t) = 0 + 0 = 0. \qquad \rightleftharpoons$$

OBS: De modo que, com apenas duas soluções de (6) obtivemos uma infinidade não enumerável de soluções de (6).

Pergunta 1: Será que toda solução de (6) possui a estrutura dada por (7)? Ou seja, será que a ***solução geral*** de (6) possui a estrutura (7)?

Para respondermos a essa pergunta utilizaremos um caso particular no qual é fácil obter duas soluções. Consideremos a seguinte EDO

$$y'' + y = 0 \qquad (8)$$

é fácil ver que $y_1(t) = \cos t, y_2(t) = \operatorname{sen} t$ são soluções de (6) em toda reta. Para provarmos que a ***solução geral*** de (8) é dada por

$$c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \qquad (9)$$

teremos que utilizar o **T. E. U.** A idéia é a seguinte; dada uma solução arbitrária de (8), $\varphi(t)$, construir um PVI cuja única solução seja $\varphi(t)$ e, em seguida, provar que existem constantes c_1^*, c_2^* tais que a particular combinação linear dada por

$$y^*(t) = c_1^* \cos t + c_2^* \operatorname{sen} t \qquad (10)$$

também é solução do mesmo PVI. Seja $\varphi(t)$ solução arbitrária de (8). Tomando $t_0 \in \mathbb{R}$, sejam os números $\varphi(t_0) = y_0, \varphi'(t_0) = y_1$.. Tem-se que a EDO (8) satisfaz as condições do **T. E. U.** de modo que o seguinte

$$PVI: \begin{cases} y'' + y = 0, -\infty < t < \infty \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

possui uma única solução: $\varphi(t)$. Por outro lado, tem-se que um representante de (9) será solução única do PVI se satisfizer as condições iniciais, ou seja, se o seguinte sistema linear possuir solução única

$$\begin{cases} c_1 \cos t_0 + c_2 \operatorname{sen} t_0 = y_0 \\ -c_1 \operatorname{sen} t_0 + c_2 \cos t_0 = y_1 \end{cases}$$

Entretanto, a matriz dos coeficientes do sistema é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos t_0 & \operatorname{sen} t_0 \\ -\operatorname{sen} t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = 1 \neq 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

De modo que, existem únicos $c_1^*, c_2^* \in \mathbb{R}$ solução do sistema. Portanto, a função dada pôr (10) também é solução do mesmo PVI cuja única solução é $\varphi(t)$. Então, pôr unicidade da solução obtém-se que $\varphi \equiv y^*$. Como $\varphi(t)$ é totalmente arbitrária, conclui-se que a ***solução geral*** de (8) é dada pôr

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$$

Este caso particular nos dá um roteiro para o caso geral! Antes porém, devemos responder a seguinte questão

Pergunta 2: Será que quaisquer duas soluções de (6) servem para construirmos a ***solução geral?***

Analisando o caso particular, observa-se que o ponto crucial foi $\det \mathbf{A} \neq 0$. Entretanto, a matriz dos coeficientes foi calculada num ponto arbitrário t_0. Com esta observação podemos obter o seguinte resultado

Teorema: (Estrutura da Solução geral)

Hipóteses:

(H1) $y_1(t), y_2(t)$ *soluções de (6) em* $\alpha < t < \beta$.

(H2) $y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0 \text{ em } \alpha < t < \beta$.

Tese: A ***solução geral*** *de (6) é dada por*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Prova: Adaptação imediata do argumento acima. $\rightleftharpoons$

OBS: O critério dado em (H2) demonstrou ser tão importante que mereceu um nome próprio escolhido em homenagem a seu descobridor; ***Józef Maria Hoëné Wronski*** (1776-1853).

Definição 4: Dadas duas funções, $y_1(t), y_2(t)$, diferenciáveis em $\alpha < t < \beta$. Denomina-se **Wronskiano** de $y_1(t), y_2(t)$ a seguinte função

$$W :]\alpha,\beta[\to IR : t \mapsto W[y_1,y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Definição 5: Duas soluções de (6), $y_1(t), y_2(t)$,são ditas formar um ***conjunto fundamental*** para as soluções de (6) se só se $W[y_1(t), y_2(t)](t) \neq 0, \forall t \in]\alpha, \beta[$.

Caráter ***tudo ou nada*** do Wronskiano:

Teorema: *Hipóteses:*

(H_1) p(t),q(t) contínuas em $\alpha < t < \beta$.

(H_2) $y_1(t), y_2(t)$ *soluções de (6).*

Tese: $W[y_1, y_2](t)$ *ou é identicamente nulo ou nunca se anula em* $\alpha < t < \beta$.

Prova: A demonstração se baseia no seguinte resultado

Lema: (***Fórmula de Abel***)

Dadas $y_1(t), y_2(t)$ *soluções da EDO (6)*

$$y'' + p(t)y + q(t)y = 0 \quad \text{em} \quad \alpha < t < \beta.$$

Tem-se que

$$W[y_1, y_2](t) = Ce^{-\int p(t)dt} \quad \textbf{(1}^{\underline{a}}\textbf{ fórmula)}$$

onde C é uma constante conveniente.

Prova: Observando que

$$\frac{d}{dt}W[y_1,y_2](t) = \frac{d}{dt}\left[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)\right] = y_1y_2'' - y_1''y_2 = y_1[-py_2' - qy_2] - y_2[-py_1' - qy_1]$$
$$= p(t)[y_1'y_2 - y_1y_2'] = -p(t)W[y_1,y_2](t)$$

obtém-se que $W[y_1, y_2](t)$ satisfaz seguinte EDO

$$\frac{d}{dt}W[y_1,y_2](t) + p(t)W[y_1,y_2](t) = 0 \quad \text{em} \quad \alpha < t < \beta,$$

a qual é uma EDO linear cuja solução geral é dada por

$$W[y_1, y_2](t) = Ce^{-\int p(t)dt}, \alpha < t < \beta. \quad \rightleftharpoons$$

Retornando a prova do teorema, tem-se que como a exponencial nunca se anula então se $C \neq 0$ o Wronskiano nunca se anula em $\alpha < t < \beta$, caso contrário será nulo em $\alpha < t < \beta$ $\rightleftharpoons$

Exemplo: Por substituição direta pode-se provar que $y_1(t) = \text{sen}^3 t$ e $y_2(t) = \cos\sec^2 t$ são soluções de

$$y'' + (\text{tg}t)y' - 6(\text{cotg}^2 t)y = 0 \ , 0 < t < \pi/4.$$

Além disso, tem-se que

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} \text{sen}^3 t & 1/\text{sen}^2 t \\ 3\text{sen}^2 t \cos t & -2\cos t/\text{sen}^3 t \end{vmatrix} = -5\cos t \neq 0, 0 < t < \pi/4.$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$y(t) = C_1 \text{sen}^3 t + C_2 \cos\sec^2 t \ , C_i \in \mathbb{R}$$

Aplicação da fórmula de Abel: obtenção de um conjunto fundamental.

Dada uma solução não-trivial da EDO (6), a fórmula de Abel permite obter a solução geral. De fato, se $y_1 \neq 0$ é uma solução de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (6)$$

então toda solução $y_2(t)$ de (6) deve satisfazer a equação dada pela fórmula de Abel

$$W[y_1, y_2](t) = Ce^{-\int p(t)dt}, (C \neq 0)$$

donde

$$y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = Ce^{-\int p(t)dt} \Rightarrow y_2'(t) - \frac{y_1'(t)}{y_1(t)} y_2(t) = \frac{C}{y_1(t)} e^{-\int p(t)dt}$$

então $\mu(t) = e^{-\int \frac{y_1'(t)}{y_1(t)}dt} = e^{-\int d(Log|y_1(t)|} = \dfrac{1}{|y_1(t)|} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(\mu(t)y_2(t)) = \dfrac{C}{y^2{}_1(t)} e^{-\int p(t)dt}$

donde obtem-se que

$$y_2(t)=Cy_1(t)\int^t \frac{e^{-\int^s p(\tau)d\tau}}{y^2{}_1(s)}ds+C_1y_1(t) \quad , \quad C,C_1 \in \mathbb{R} .$$

Teorema: Se $y_1(t)$ é uma solução não-trivial de (6), então

$$\boxed{y_2(t) = y_1(t)\int^t \frac{e^{-\int^s p(\tau)d\tau}}{y^2{}_1(s)}ds}$$

é uma solução de (6) em qualquer intervalo aonde $y_1(t)\neq 0$. Além disso, $y_2(t)$ é ***l.i.*** de $y_1(t)$ e, portanto, a solução geral é dada por

$$y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t) \ \ , \ C_i \in \mathbb{R}$$

Exemplo: (Compatibilidade entre os coeficientes)

Dada a EDO

$$t^2y''+t^3y'-2(1+t^2)y=0 \ \ ,0<t<+\infty.$$

Obtenha a solução geral. Tem-se que os coeficientes são polinomiais. Portanto, vamos tentar uma solução "compatível" com os, ou seja polinomial da forma (mais simples possível)

$$y_1(t)=t^n \ \ , n=0,1,2,...$$

Tomando $n=0$; obtem-se que

$$t^2(0)+t^3(0)-2(1+t^2)(1)=-2(1+t^2)\neq 0 \ \ , \ \forall t\in\mathbb{R}$$

De modo que, $y_1\equiv 1$ não é solução da EDO. Tomando $n=1$; obtem-se que

$$t^2(0)+t^3(1)-2(1+t^2)(t)=-2t-t^3=0 \Leftrightarrow t(2+t^2)=0 \Leftrightarrow t=0 \,!?.$$

Tomando $n=2$; obtem-se que

$$t^2(2)+t^3(2t)-2(1+t^2)(t^2)=0 \ , \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Logo, $y_1(t)=t^2$ é uma solução não-trivial da EDO. Colocando a EDO na forma que se pode aplicar a fórmula de Abel, o que é possível pois $t>0$, ou seja na forma em que se pode determinar o coeficiente *p(t)*

$$y''+ty'-2\frac{(1+t^2)}{t^2}y=0 \ , 0<\mathrm{t}<+\infty,$$

obtem-se que

$$y_2(t)=t^2\int^t \frac{e^{-\int^s \xi d\xi}}{(s^2)^2}ds = t^2\int^t s^{-4}e^{-s^2/2}ds\,,$$

é solução ***l.i.*** com $y_1(t)=t^2$, donde a solução geral é dada por

$$y(t)=C_1t^2+C_2t^2\int t^{-4}e^{-t^2/2}dt \quad , \ C_i \in \mathbb{R}\,.$$

OBS: Como o determinante de uma matriz $n\times n$ é diferente de zero se só se as colunas da matriz formam vetores ***l.i.*** no $\mathbb{R}^n$, somos levados a concluir que se $W[f_1,f_2](t)\neq 0$ em $\alpha<t<\beta$, então f_1, f_2 interpretadas como vetores de $C^0(]\alpha,\beta[)$ são ***l.i.*** em $\alpha<t<\beta$. Entretanto, a recíproca é falsa, ou seja não se pode deduzir a dependência linear de um conjunto de funções a partir do fato do seu Wronskiano se anular em $\alpha<t<\beta$.

Exemplo: As funções x^3 e $|x|^3$ são ***l.i.*** em $C^0(\mathbb{R})$, pois

$$c_1x^3+c_2|x|^3=0, \forall x\in [\![\Rightarrow \begin{cases} c_1(1)^3+c_2|1|^3=0 \\ c_1(-1)^3+c_2|-1|^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1=c_2=0\,.$$

Por outro lado, se $x\geq 0$

$$W[x^3,|x|^3](x)=\begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix}=0$$

e se $x<0$

$$W[x^3,|x|^3](x)=\begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix}=0\,.$$

Entretanto, se as funções forem soluções de uma EDO linear homogênea na forma (6) (coeficiente líder igual a 1), então a recíproca é verdadeira.

Teorema: *Hipóteses:*

$(H_1)\ y_1(t), y_2(t)$ *soluções de (6) em* $\alpha < t < \beta$.

$(H_2)\ W[y_1, y_2](t_0) = 0$ *para algum* $t_0 \in]\alpha, \beta[$.

Tese: Uma solução é múltiplo constante da outra.

Prova: Como $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ então o sistema

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = 0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

possui uma solução não trivial $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$, $|\tilde{c}_1| + |\tilde{c}_2| \neq 0$. Tomando $\tilde{y}(t) = \tilde{c}_1 y_1(t) + \tilde{c}_2 y_2(t)$, tem-se que $\tilde{y}$ é uma solução de (6). Além disso, por construção $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}'(t_0) = 0$. Pelo corolário do **T. E. U.** conclui-se que

$$\tilde{y}(t) = 0, \alpha < t < \beta \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = -\dfrac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1} y_2(t) & \text{, se } \tilde{c}_1 \neq 0 \\ y_2(t) = -\dfrac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_2} y_1(t) & \text{, se } \tilde{c}_2 \neq 0 \end{cases}$$

Definição 6: Duas funções $f_1(t), f_2(t)$ são ***linearmente dependentes*** (***l.d.***) num intervalo ***I*** se uma é um múltiplo constante da outra. Caso contrário, elas são ditas ***linearmente independentes*** (***l.i.***) em ***I***.

Corolário: *Duas soluções* $y_1(t), y_2(t)$ *de (6) são* ***l.i.*** *em* $\alpha < t < \beta$ *se somente se seu Wronskiano é diferente de zero nesse intervalo. De modo que, duas soluções formam um* ***conjunto fundamental*** *para (6) no intervalo* $\alpha < t < \beta$ *se só se elas são* ***l.i.*** *nesse intervalo.*

EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES:

Dada uma EDO linear homogênea de $2^{\underline{a}}$ ordem a coeficientes constantes

$$L[y] = a_2 D^2 y + a_1 Dy + a_0 y = 0 \qquad (11)$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, já sabemos a estrutura de sua solução geral. Entretanto, não sabemos como obter um conjunto fundamental de soluções! Por outro lado, observando a estrutura da EDO chega-se a conclusão que y'', y', y devem ser "proporcionais" entre si (da mesma família) para que uma combinação linear delas tenha chance de ser identicamente nula. Após algumas tentativas chegou-se ao seguinte fato

$$L[e^{rt}] = a_2 (e^{rt})'' + a_1 (e^{rt})' + a_0 e^{rt} = (a_2 r^2 + a_1 r + a_0) e^{rt}$$

Definição 7: $p_L(r) = a_2 r^2 + a_1 r + a_0$ é o polinômio associado ao operador *L*.

Teorema: *(Método de Resolução)*

Dada um a EDO do tipo (11)

$1^{\underline{o}}$) Obtém-se as raízes r_1, r_2 de p_L .

$2^{\underline{o}}$) A solução geral será dada segundo a seguinte tabela

r_1, r_2	conj. fundamental	solução geral
$r_1, r_2 \in R, r_1 \neq r_2$	$y_1(t) = e^{r_1 t}$ $y_2(t) = e^{r_2 t}$	$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
$r_1 = r_2 = r$	$y_1(t) = e^{rt}$ $y_2(t) = te^{rt}$	$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$
$r_1 = \lambda + i\mu$ $r_2 = \lambda - i\mu$	$y_1(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t$ $y_2(t) = e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t$	$y(t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos \mu tt + c_2 \operatorname{sen} \mu t)$

Prova:

1^0 Caso: $r_1, r_2 \in R, r_1 \neq r_2$: Neste caso, $y_1(t) = e^{r_1 t}, y_2(t) = e^{r_2 t}$ são soluções ***l.i.*** de (11), uma vez que

$$W[e^{r_1 t}, e^{r_2 t}] = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

2^0 Caso: $r_1 = r_2 = r$: Neste caso, tem-se apenas uma solução $y_1(t) = e^{rt}$. Para se obter uma segunda solução ***l.i.*** com y_1 aplicamos a fórmula de Abel.

$$y_2(t) = y_1(t)\int^t \frac{e^{-\int^s p(x)dx}}{{y_1}^2(s)}ds = e^{rt}\int^t \frac{e^{-\int^s (-2r)dx}}{e^{2rs}}ds = e^{rt}\int^t \frac{e^{2rs}}{e^{2rs}}ds = te^{rt}\,.$$

3^0 Caso: $r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu, \mu \neq 0$: Neste caso, $\psi_1(t) = e^{r_1 t}, \psi_2(t) = e^{r_2 t}$ continuam sendo soluções da EDO, entretanto são **soluções a valores complexos** ! Será necessário obter um modo de se extrair de ψ_1 e ψ_2 duas soluções ***l.i.*** a valores reais. Para isso, utilizaremos a famosa ***fórmula de Euler*** :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \ \forall\theta \in \mathbb{R}\,. \quad \text{(E)}$$

Obtenção de (E): supondo que para expoentes complexos também vale

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t}e^{i\mu t}$$

então basta obter o valor de $e^{i\mu t}$. Por outro lado, para $x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

procedendo formalmente e substituindo *x* por $i\theta$, obtém-se que

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \ldots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \ldots$$

onde, por Gauss,

$$\boxed{i^2 = -1}$$

De modo que, $i^3 = -i \;, i^4 = i^3 i = -i^2 = 1 \;, i^5 = i \;, i^6 = i^2 = -1 \;, i^7 = i^6 i = -i \;, \ldots$

donde

$$i^n = \begin{cases} (-1)^k, & \text{se}\, n = 2k \\ (-1)^k i\,, & \text{se}\, n = 2k+1 \end{cases}$$

Portanto,

$$e^{i\theta} = \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - ... + (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + ...\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - ... + (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + ...\right]$$
$$= \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \;,\; \forall\theta \in R.$$

Então, $\psi_1(t) = e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\,\mathrm{sen}\,\mu t)$ e $\psi_2(t) = e^{\lambda t}(\cos\mu t - i\,\mathrm{sen}\,\mu t)$ são duas soluções de (11) a valores complexos.

Obtenção de duas soluções reais a partir das soluções complexas.

Lema: (*Descomplexificação*1)

Hipótese: $\psi(t) = u(t) + iv(t)$ *é uma solução complexa de (11).*

Tese: $y_1(t) = u(t), y_2(t) = v(t)$ *são duas soluções reais de (11), isto é*

$$L[y_1] = 0 \text{ e } L[y_2] = 0.$$

Prova: Tem-se que

$$0 = L[\psi](t) = L[u + iv](t) = L[u](t) + iL[v](t)$$

Por outro lado, $0 = 0 + i0$ e dois números complexos são iguais se só se suas respectivas partes reais e imaginárias são iguais. $\rightleftharpoons$

De modo que, de $\psi_1(t)$ podemos obter duas soluções reais

$$y_1(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t \text{ e } y_2(t) = e^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\mu t\,.$$

Como

$$W[y_1, y_2](t) = \mu e^{2\lambda t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

então $y_1(t), y_2(t)$ formam um conjunto fundamental para as soluções de (11). $\rightleftharpoons$

OBS: Aparentemente, $\psi_2(t)$ daria origem a outro par de soluções reais. Entretanto, tem-se que

$$\psi_2(t) = e^{\lambda t}(\cos\mu t - i\,\mathrm{sen}\,\mu t) \rightarrow \begin{cases} \tilde{y}_1(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t = y_1(t) \\ \tilde{y}_2(t) = -e^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\mu = -y_2(t) \end{cases}$$

ou seja $\tilde{y}_2(t)$ é ***l.d.*** com $y_2(t)$.

Consideremos agora o problema de obter a solução geral da EDO linear não homogênea

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \quad \text{(LNH)}$$

onde $p(t), q(t), f(t)$ são contínuas em $\alpha < t < \beta$. Um importante indício é dado pela estrutura da solução geral da EDO

$$y' + 2ty = t\,.$$

A solução geral é dada por

$$y = Ce^{t^2} + \frac{1}{2}$$

Tem-se que a solução é a soma de dois termos: o primeiro termo é a solução geral da homogênea associada enquanto que o segundo termo é uma solução particular, ½, da EDO não homogênea.

Lema: A diferença de duas soluções quaisquer de (LNH) é uma solução da homogênea associada.

Prova: Se ψ_1, ψ_2 são soluções de (LNH) então

$$L[\psi_1 - \psi_2] = L[\psi_1] - L[\psi_2] = f(t) - f(t) = 0 \quad \rightleftharpoons$$

Teorema: *(Estrutura da Solução Geral)*

Hipóteses:

(H₁) $y_1(t), y_2(t)$ *soluções **l.i.** da homogênea associada*

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0\,.$$

(H₂) $\psi(t)$ *qualquer solução particular de (LNH).*

Tese: A solução geral de (LNH) possui a seguinte estrutura

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

onde $y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ *é a solução geral da homogênea associada e* $y_p(t) = \psi(t)$ *é uma solução particular.*

Prova: Seja $y(t)$ uma solução qualquer de (LNH). Pelo lema acima, $\varphi(t) = y(t) - \psi(t)$ é uma solução da homogênea associada. Então, existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, tais que

$$\varphi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \Rightarrow y(t) = \varphi(t) + \psi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \psi(t). \quad \rightleftharpoons$$

Exemplo: Obter a solução geral da EDO

$$y'' + y = t.$$

Tem-se que um conjunto fundamental é dado pôr $\{y_1(t) = \cos t, y_2(t) = \operatorname{sen} t\}$, donde a solução geral da homogênea associada é dada pôr

$$y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

Pôr outro lado, tem-se que $y_p(t) = t$ é uma solução particular para a EDO não homogênea. Logo, a solução geral da EDO não homogênea é dada pôr

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + t.$$

MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS:

Objetivo: dada uma EDO (LNH) obter uma solução particular $y_p(t)$ através da "inversão" do operador *L*.

$$y_p(t) = L^{-1}[f](t).$$

Idéia: obter $y_p(t)$ a partir de uma "deformação diferenciável" da solução geral da homogênea associada. Para isso supôs-se que existem funções $c_1(t), c_2(t) \in C^2(]\alpha, \beta[)$ tais que

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t). \qquad (12)$$

Aplicando *L* a (12), obtém-se que

$$\begin{aligned} L[y_p](t) &= D^2(c_1y_1 + c_2y_2) + p(t)D(c_1y_1 + c_2y_2) + q(t)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= D(c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2') + p(t)(c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2') + q(t)(c_1y_1 + c_2y_2) \end{aligned}$$

Hipótese simplificadora: $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$, $\alpha < t < \beta$.

Com isso obtém-se que

$$\begin{aligned} L[y_p](t) &= D(c_1y_1' + c_2y_2') + p(t)(c_1y_1' + c_2y_2') + q(t)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1'y_1' + c_2'y_2 + c_1(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1) + c_2(y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2) \end{aligned}$$

Ou seja

$$L[y_p](t) = c_1'y_1' + c_2'y_2'$$

Impondo que $y_p(t)$ seja solução de (LNH), obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = 0 \\ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'y_2'(t) = f(t) \end{cases} \quad \text{em } \alpha < t < \beta.$$

cuja matriz dos coeficientes é exatamente $W[y_1, y_2](t)$, o qual por hipótese é não nulo em $\alpha < t < \beta$. De modo que, o sistema é possível e determinado em $\alpha < t < \beta$. Logo, existe uma solução $(c_1'(t), c_2'(t))$ dada por

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ f(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2](t)} = \frac{-f(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)} \Rightarrow c_1(t) = C_1 + \int \frac{-f(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt$$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1' & f(t) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2](t)} = \frac{f(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)} \Rightarrow c_2(t) = C_2 + \int \frac{f(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt$$

desprezando as constantes, para evitar redundâncias, obtem-se que

$$y_p(t)=\left[\int^t \frac{-f(s)y_2(s)}{W[y_1,y_2](s)}ds\right]y_1(t)+\left[\int^t \frac{f(s)y_1(s)}{W[y_1,y_2](s)}ds\right]y_2(t)$$

ou seja

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int^t \frac{[y_1(s)y_2(t)-y_1(t)y_2(s)]}{W[y_1,y_2](s)} f(s)ds \\ &= \int^t G(s,t)f(s)ds \\ &= L^{-1}[f](t). \end{aligned}$$

OBS: A construção de y_p foi obtida através da "inversão" do operador diferencial *L*, a qual produziu um operador integral L^{-1}. Este operador foi um dos primeiros exemplos de ***operador integral nuclear***, cujo núcleo $G(s,t)$ passou a ser chamado a ***função de Green*** do operador *L*.

Exemplo: Resolva o seguinte PVI

$$\begin{cases} y''+y=\operatorname{tg} t\,, -\pi/2<t<\pi/2 \\ y(0)=1,\, y'(0)=1 \end{cases}$$

Homogênea Associada: $y''+y=0 \Rightarrow$ Solução Geral: $y_h(t)=C_1\cos t+C_2 \operatorname{sen} t$

$\Rightarrow y_1(t)=\cos t$, $y_2(t)=\operatorname{sen} t \Rightarrow W[y_1,y_2](t)=1, \forall t\in]-\pi/2,\pi/2[$.

Solução Particular: como o coeficiente líder é um, então $f(t)=\operatorname{tg} t$ e

$$G(s,t)=\frac{y_1(s)y_2(t)-y_1(t)y_2(s)}{W[y_1,y_2](s)}=\cos s(\operatorname{sen} t)-\cos t(\operatorname{sen} s)=\operatorname{sen}(t-s)$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= L^{-1}[f](t)=\int^t G(s,t)f(s)ds=\int^t \operatorname{sen}(t-s)\operatorname{tg} s\, ds=\operatorname{sen} t\int^t \operatorname{sen} s ds-\cos t\int^t \frac{\operatorname{sen}^2 s}{\cos s}ds \\ &= -\operatorname{sen} t\cos t-\cos t\left[\int^t \frac{(1-\cos^2 s)}{\cos s}ds\right]=-\operatorname{sen} t\cos t-\cos t\left[\int^t \sec s ds-\cos s ds\right] \\ &= -\operatorname{sen} t\cos t-\cos t\left[\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|-\operatorname{sen} t\right]=-\cos t\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|. \end{aligned}$$

De modo que, a solução geral da EDO não homogênea é

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t - \cos t \ln\left|\sec t + \operatorname{tg} t\right|.$$

Impondo as condições iniciais, obtem-se que a solução do PVI é dada por

$$y(t) = \cos t + 2\operatorname{sen} t - \cos t \ln(\sec t + \operatorname{tg} t).$$

Exemplo: Obtenha uma solução particular da seguinte EDO

$$L[y](t) = \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = t^2.$$

Homogênea Associada:

$$y'' + y' + y = 0 \Rightarrow p_L(r) = r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ r_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

conjunto fundamental: $\begin{cases} y_1(t) = e^{-t/2}\cos\sqrt{3}t/2 \\ y_2(t) = e^{-t/2}\operatorname{sen}\sqrt{3}t/2 \end{cases} \Rightarrow W[y_1, y_2](t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}.$

Solução Particular: como o coeficiente líder é um, então $f(t) = t^2$ donde

$$G(s,t) = \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{W[y_1, y_2](s)} = \frac{(e^{-s/2}\cos\sqrt{3}s/2)(e^{-t/2}\operatorname{sen}\sqrt{3}t/2) - (e^{-t/2}\cos\sqrt{3}t/2)(e^{-s/2}\operatorname{sen}\sqrt{3}s/2)}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-s}}$$

Logo,

$$y_p(t) = L^{-1}[f](t) = \int^t G(s,t) f(s)ds = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\left[\operatorname{sen}\sqrt{3}t/2\int^t s^2 e^{s/2}\cos\sqrt{3}s ds - \cos\sqrt{3}t/2\int^t s^2 e^{s/2}\operatorname{sen}\sqrt{3}s ds\right]$$

Estas integrações são extremamente difíceis de calcular. De modo que, o método da variação dos parâmetros nem sempre produz resultados práticos! Isso, sob o ponto de vista das aplicações é uma séria deficiência.

O Método da Tentativa Criteriosa ou Método dos Coeficientes Indeterminados:

Este método é uma conseqüência da "compatibilidade" entre os coeficientes de uma EDO linear e suas soluções. O método dos coeficientes indeterminados fornece uma alternativa simples para construção de uma solução particular de uma EDO não-homogênea a coeficientes constantes

$$L[y](t) = ay'' + by' + cy = f(t) \quad (13)$$

para *f(t)* pertencente a uma certa família de funções (***"quase-polinômios"***).

Caso 1: $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$

Neste caso, y_p tem que ser uma função tal que ay_p'', by_p', cy_p somado seja um polinômio de grau n. De modo que, tem-se que ter

$$y_p(t) = A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n \quad (14)$$

Aplicando *L* obtém-se que

$$\begin{aligned} L[y_p](t) &= a(A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n)'' + b(A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n)' + c(A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n) \\ &= a(A_1 + 2A_2 t + \ldots + nA_n t^{n-1})' + b(A_1 + 2A_2 t + \ldots + nA_n t^{n-1}) + c(A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n) \\ &= a(2A_2 + 6A_3 t + \ldots + n(n-1)A_n t^{n-2}) + b(A_1 + 2A_2 t + \ldots + nA_n t^{n-1}) + c(A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n) \\ &= cA_n t^n + (cA_{n-1} + nbA_n)t^{n-1} + (cA_{n-2} + (n-1)bA_{n-1} + n(n-1)aA_n)t^{n-2} + \ldots + (cA_0 + bA_1 + 2aA_2) \end{aligned}$$

Igualando à (14), obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} cA_n & = a_n \\ nbA_n + \quad cA_{n-1} & = a_{n-1} \\ n(n-1)aA_n + (n-1)bA_{n-1} + cA_{n-2} & = a_{n-2} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \\ 2aA_2 + bA_1 + cA_0 & = a_0 \end{cases}$$

Se $c \neq 0 \Rightarrow A_n = \dfrac{a_n}{c} \Rightarrow A_{n-1} = \dfrac{1}{c}(a_{n-1} - nb\dfrac{a_n}{c}) \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_0 = \dfrac{1}{c}(a_0 - bA_1 - 2aA_2).$

Se $c = 0 \Rightarrow L[y_p](t) = ay_p'' + by_p'$ é um polinômio de grau *n*-1 enquanto que *f(t)* é de grau *n*. Para podermos igualar precisamos tornar $L[y_p](t)$ um polinômio de grau *n*. Portanto devemos tomar y_p um polinômio de grau *n*. A maneira mais simples (sem aumentar o n^0 de coeficientes e portanto de equações) de fazer isso é tomar

$$y_p(t) = t(A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n) \quad (15).$$

Aplicando *L* determinamos $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_0$, caso se tenha $b \neq 0$, através da equação

$$ay_p'' + by_p' = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n .$$

Se $b = 0 \Rightarrow L[y_p](t) = ay_p''$ e basta integrar duas vezes para se obter

$$y_p(t) = \frac{1}{a}(a_0 \frac{t^2}{2} + a_1 \frac{t^3}{3.2} + \ldots + a_n \frac{t^{n+2}}{(n+2)(n+1)}) .$$

Resumo:

$$y_p(t) = \begin{cases} A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n & , \text{se } c \neq 0 \\ t(A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n) , \text{se } c = 0, b \neq 0 \\ t^2 (A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n), \ \text{se } c = b = 0 \end{cases}$$

Caso 2: $f(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) e^{\alpha t}$

Neste caso, fazemos a mudança

$$y_p(t) = e^{\alpha t} u(t)$$

para reduzirmos ao caso 1. Tem-se que

$$y_p' = e^{\alpha t}(u' + \alpha u) \text{ e } y_p'' = e^{\alpha t}(u'' + 2\alpha u' + \alpha^2 u) .$$

De modo que,

$$\begin{aligned} L[y_p](t) &= ae^{\alpha t}(u'' + 2\alpha u' + \alpha^2 u) + be^{\alpha t}(u' + \alpha u) + ce^{\alpha t} u \\ &= e^{\alpha t}\left[au'' + (2a\alpha + b)u' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u\right] \end{aligned}$$

igualando a *f(t)* obtém-se que $y_p(t) = e^{\alpha t} u(t)$ é solução se só se

$$au'' + (2a\alpha + b)u' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n . \quad (16)$$

Resumo:

$$y_p(t)=\begin{cases}(A_0+A_1t+...+A_nt^n)e^{\alpha t}, & \text{se } p_L(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c\neq 0\\ t(A_0+A_1t+...+A_nt^n)e^{\alpha t}, & \text{se } p_L(\alpha)=0, \text{mas } 2a\alpha+b\neq 0.\text{(raiz simples)}\\ t^2(A_0+A_1t+...+A_nt^n)e^{\alpha t}, & \text{se } p_L(\alpha)=0 \text{ e } 2a\alpha+b=0.\text{(raiz dupla)}\end{cases}$$

Caso 3: $f(t)=(a_0+a_1t+...+a_nt^n)e^{\lambda t}.\begin{cases}\cos\mu t\\ \text{sen}\mu t\end{cases}$

Neste caso reduzimos ao caso 2 utilizando o seguinte resultado

Lema: (*Descomplexificação* 2)

Hipótese: $\psi(t)=u(t)+iv(t)$ solução complexa da EDO

$$L[y](t)=f(t)+ig(t)$$

Tese: Tem-se que

$$L[u](t)=f(t) \text{ e } L[v](t)=g(t).$$

Prova: Pelo princípio da superposição,

$$f(t)+ig(t)=L[u+iv](t)=L[u](t)+iL[v](t)\Leftrightarrow L[u](t)=f(t) \text{ e } L[v](t)=g(t).\,]\!]$$

Complexificação: seja $\psi_p(t)=u(t)+iv(t)$ solução da EDO complexa

$$L[y](t)=(a_0+a_1t+...+a_nt^n)e^{(\lambda+i\mu)t}$$

Pelo Lema, tem-se que

$u(t)=\text{Re}(\psi_p(t))$ é solução de $L[y](t)=(\sum_{k=0}^{n}a_kt^k)e^{\lambda t}\cos\mu t$

$v(t)=\text{Im}(\psi_p(t))$ é solução de $L[y](t)=(\sum_{k=0}^{n}a_kt^k)e^{\lambda t}\,\text{sen}\mu t$.

OBS: Generalização: dada a EDO

$$L[y](t)=\sum_{k=1}^{m}p_k(t)e^{\alpha_k t}\ ,\ \alpha_k=\lambda_k+i\mu_k\,.$$

Se $\quad L[\psi_k](t)=p_k(t)e^{\alpha_k t},k=1,\ldots,m\Rightarrow\psi_p(t)=\sum_{k=1}^{m}\psi_k(t)$, onde ψ_k é solução particular da EDO complexa

$$L[y](t)=p_k(t)e^{\alpha_k t},k=1,\ldots,m\,.$$

Então se tem que

$$\begin{aligned}u_k(t)&=\mathrm{Re}(\psi_k)\text{ é solução de }L[y](t)=p_k(t)e^{\lambda_k t}\cos\mu_k t\\ v_k(t)&=\mathrm{Im}(\psi_k)\text{ é solução de }L[y](t)=p_k(t)e^{\lambda_k t}\,\mathrm{sen}\mu_k t\end{aligned}$$

Exemplo: Retornemos a obtenção da solução particular da EDO

$$L[y](t)=y''+y'+y=t^2.$$

Como $f(t)=t^2$ estamos no caso 1. De modo que, tomaremos

$$y_p(t)=A_0+A_1t+A_2t^2\Rightarrow\begin{cases}y_p'(t)=A_1+2A_2t\\ y_p''(t)=2A_2\end{cases}$$

donde

$$L[y_p](t)=(2A_2)+(A_1+2A_2t)+(A_0+A_1t+A_2t^2)=(A_0+A_1+2A_2)+(A_1+2A_2)t+A_2t^2$$

logo,

$$L[y](t)=t^2\Leftrightarrow\begin{cases}A_2=1\\ A_1+2A_2=0\\ A_0+A_1+2A_2=0\end{cases}\Leftrightarrow A_0=0,A_1=-2,A_2=1$$

Portanto,

$$y_p(t) = t^2 - 2t .$$

Exemplo: Obter a solução geral da EDO

$$y'' - 4y' + 4y = (1 + t + ... + t^{27})e^{2t} .$$

Tem-se que $p_L(r) = r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 2$

Homogênea Associada: Conjunto fundamental

$$y_1(t) = e^{2t}, y_2(t) = te^{2t} .$$

Solução Particular: Como $r_1 = r_2 = \alpha = 2$, estamos no caso 2, com

$$p_L(\alpha) = 0 \text{ e } 2a\alpha + b = 0$$

ou seja α é raiz dupla de $p_L(r)$. Logo,

$$y_p(t) = t^2(A_0 + A_1 t + ... + A_{28} t^{27})e^{2t}$$

Entretanto, é mais simples fazermos a mudança

$$y_p(t) = e^{2t}u(t)$$

obtermos que

$$u'' = 1 + t + ... + t^{27}$$

integrarmos duas vezes e obter

$$y_p(t) = e^{2t}(\tfrac{t^2}{1.2} + \tfrac{t^3}{2.3} + ... + \tfrac{t^{29}}{28.29}).$$

Solução Geral:

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 te^{2t} + e^{2t}(\tfrac{t^2}{2} + ... + \tfrac{t^{29}}{28.29}).$$

Exemplo: Obter uma solução particular da EDO

$$L[y](t) = y'' - 3y' + 2y = (1+t)e^{3t}.$$

Tem-se que

$$p_L(r) = r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1, r_2 = 2$$

Logo, $\alpha = 3$ não é raiz de p_L. Logo,

$$y_p(t) = (A_0 + A_1 t)e^{3t} \Rightarrow \begin{cases} y_p{}'(t) = 3e^{3t}A_1 + 3e^{3t}(3A_0 + 3A_1 t) \\ y_p{}''(t) = 6A_1 e^{3t} + e^{3t}(9A_0 + 9A_1 t) \end{cases}$$

Substituindo obtém-se que

$$L[y_p](t) = e^{3t}[(2A_0 + 3A_1) + 2A_1 t] \Leftrightarrow (2A_0 + 3A_1) + 2A_1 t = 1 + t \Leftrightarrow \begin{cases} 2A_1 = 1 \\ 2A_0 + 3A_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A_0 = -\frac{1}{4} \\ A_1 = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

De modo que,

$$y_p(t) = (-\tfrac{1}{4} + \tfrac{t}{2})e^{3t}.$$

Exemplo: Obter uma solução particular da EDO

$$L[y](t) = y'' + 4y = \text{sen}2t.$$

Agora estamos no caso3 com

$$f(t) = (a_0 + ... + a_n t^n)e^{\lambda t}\,\text{sen}\,\mu t \;,\; a_0 = 1, a_k = 0, k = 1,..., n, \lambda = 0, \mu = 2$$

Como

$$p_L(r) = r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 2i \\ r_2 = -2i \end{cases} \Rightarrow p_L(\alpha) = 0$$

sendo que $\alpha = \lambda + i\mu = 2i$ é evidentemente raiz simples.Logo, por causa do seno

$$y_p(t) = \mathrm{Im}(\psi(t))$$

onde $\psi(t) = A_0 t e^{2it} \Rightarrow \begin{cases} \psi'(t) = A_0(1+2it)e^{2it} \\ \psi''(t) = A_0(4i-4t)e^{2it} \end{cases}$

Complexificação: redução ao caso2

$$L[y](t) = e^{2it}$$

Logo, ψ é solução se só se

$$e^{2it} = L[\psi](t) = 4iA_0 e^{2it} \Leftrightarrow A_0 = 1/4i = -i/4$$

De modo que,

$$\psi(t) = -\tfrac{i}{4} t e^{2it}$$

Descomplexificação:

$$y_p(t) = \mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Im}[-\tfrac{i}{4}t(\cos 2t + i\,\mathrm{sen} 2t)] = \mathrm{Im}[\tfrac{t}{4}\mathrm{sen} 2t - i\tfrac{t}{4}\cos 2t] = -\tfrac{t}{4}\cos 2t.$$

Exemplo: Obter uma solução particular da EDO

$$L[y](t) = y'' + 2y' + y = te^t \cos t.$$

Tem-se que

$$te^t \cos t = \mathrm{Re}[\ te^{(1+i)t}]$$

Complexificação:

$$L[y](t) = te^{(1+i)t}$$

onde $\alpha = 1+i$ não é raiz de $p_L(r)$. De modo que,

$$\psi(t) = (A_0 + A_1 t)e^{(1+i)t} \Rightarrow \begin{cases} \psi' = A_1 e^{(1+i)t} + (1+i)e^{(1+i)t}(A_0 + A_1 t) \\ \psi'' = 2(1+i)e^{(1+i)t} A_1 + 2ie^{(1+i)t}(A_0 + A_1) \end{cases}$$

Substituindo obtém-se

$$te^{(1+i)t} = L[\psi](t) = (2+i)e^{(1+i)t}[(2+i)A_0 + 2A_1 + (2+i)A_1 t] \Leftrightarrow (2+i)^2 A_0 + 2(2+i)A_1 +$$

$$+ (2+i)^2 A_1 t = t \Leftrightarrow \begin{cases} (2+i)^2 A_1 = 1 \\ (2+i)A_0 + 2A_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A_0 = -\frac{2}{(2+i)^3} = \frac{-4}{125} + \frac{22}{125}i \\ A_1 = \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \end{array}$$

De modo que,

$$\psi(t) = [(-\tfrac{4}{125} + \tfrac{22}{125}i) + (\tfrac{3}{25} - \tfrac{4}{25}i)t]e^{(1+i)t}$$

Descomplexificação:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \mathrm{Re}[[(-\tfrac{4}{125} + \tfrac{22}{125}i) + (\tfrac{3}{25} - \tfrac{4}{25}i)t]e^{(1+i)t}] \\ &= \mathrm{Re}[[(-\tfrac{4}{125} + \tfrac{22}{125}i) + (\tfrac{3}{25} - \tfrac{4}{25}i)t][e^t(\cos t + i\,\mathrm{sen}t]] \\ &= e^t\,\mathrm{Re}[[(-\tfrac{4}{125} + \tfrac{22}{125}i) + (\tfrac{3}{25} - \tfrac{4}{25}i)t]\cos t + i[(-\tfrac{4}{125} + \tfrac{22}{125}i) + (\tfrac{3}{25} - \tfrac{4}{25}i)t]\mathrm{sen}t] \\ &= e^t\,\mathrm{Re}[[(\tfrac{-4}{125} + \tfrac{3}{25}t)\cos t + (\tfrac{4}{25}t - \tfrac{22}{125})\mathrm{sen}t] + i[(\tfrac{22}{125} - \tfrac{4}{25}t)\cos t + (\tfrac{3}{25}t - \tfrac{4}{125})\mathrm{sen}t] \\ &= e^t[(\tfrac{-4}{125} + \tfrac{3}{25}t)\cos t + (\tfrac{4}{25}t - \tfrac{22}{125})\mathrm{sen}t] \end{aligned}$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Definição: Uma EDO do tipo

$$L[y](t) = a_n(t)y^{(n)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \ , \alpha < t < \beta$$ (LNH$_n$)

onde $a_n(t) \neq 0$ em $\alpha < t < \beta$, é denominada ***equação linear de n-ésima ordem***. Quando $f \equiv 0$ a EDO é dita ***homogênea*** (LH$_n$).

Analogamente às EDO' s de 2ª ordem tem-se a seguinte estrutura para solução geral

Teorema: (Estrutura da Solução Geral)

Hipóteses:

(H1) $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ *soluções de (LH$_n$) em* $\alpha < t < \beta$

(H2) $W[y_1, \ldots, y_n](t) \neq 0$ *em* $\alpha < t < \beta$

*Tese: A **solução geral** de (LH$_n$) é dada por*

$$y_h(t) = C_1 y_1(t) + \ldots + C_n y_n(t)$$

Obtenção do Conjunto Fundamental para EDO' s a Coeficientes Constantes:

Tem-se que

$$L \equiv p_L(D)$$

onde $D = \frac{d}{dt}$ e $p_L(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. De modo que,

$$L[e^{rt}](t) = p_L(r)e^{rt} = 0 \Leftrightarrow r \text{ é raiz de } p_L(x)$$

Logo, se $p_L(x)$ possui *n* raízes distintas, então a solução geral será dada por

$$y_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + \ldots + C_n e^{r_n t}.$$

OBS: Usou-se que $W[e^{r_1 t}, \ldots, e^{r_n t}](t) = (-1)^n \prod_{i \neq j}^{n} (r_i - r_j) e^{(r_1 + \ldots + r_n)t}$

Caso $r_j = \lambda_j + i\mu_j$, $\mu_j \neq 0$, então $\psi_j(t) = e^{r_j t}$ é uma solução complexa e

$$u_j(t) = \mathrm{Re}[\psi_j] = e^{\lambda_j t} \cos \mu_j t \ \text{ e } \ v_j(t) = \mathrm{Im}[\psi_j] = e^{\lambda_j t} \,\mathrm{sen}\, \mu_j t$$

são soluções reais associadas a r_j. Finalmente, se r_j for uma raiz de multiplicidade *m*, então

$$p_L(x) = (x - r_j)^m q(x)$$

onde $q(r_j) \neq 0$. Neste caso, tem-se que $e^{r_j t}, te^{r_j t}, t^2 e^{r_j t}, \ldots, t^{m-1} e^{r_j t}$ são m soluções linearmente independentes. De fato, tem-se que

$$L[e^{r_j t}](t) = p_L(r) e^{r_j t} = (r - r_j)^m q(r) e^{r_j t}$$

Usando o fato que $\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial}{\partial t} e^{rt}) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial r} e^{rt})$ obtém-se que

$$L[t^k e^{r_j t}](t) = L[\frac{\partial^k}{\partial r^k} e^{rt}\Big|_{r=r_j}] = \frac{\partial^k}{\partial r^k} L[e^{rt}]\Big|_{r=r_j} = \frac{\partial^k}{\partial r^k}(r - r_j)^m q(r) e^{rt}\Big|_{r=r_j} = 0$$

para $1 \leq k < m$.

Resumo: Se

$$\boxed{p_L(r) = a \prod_{j=1}^{m} (r - r_j)^{m_j} \prod_{k=1}^{l} [r^2 - 2\lambda_k r + (\lambda_k{}^2 + \mu_k{}^2)]^{l_k}}$$

onde

m = nº de raízes reais r_j, l = nº de raízes complexas r_k

m_j = multiplicidade de r_j , l_k = multiplicidade de r_k = $\lambda_k + i\mu_k$

$$\sum_{j=1}^{m} m_j + \sum_{k=1}^{l} l_k = grau(p_L) = \dim[N(L)]$$

Tem-se que os seguintes conjuntos de soluções ***l.i.***

$$\left\{e^{r_j t}, te^{r_j t}, \ldots, t^{m_j - 1} e^{r_j t}\right\} \subset N(D - r_j)^{m_j}$$
$$\{e^{\lambda_k t} \cos \mu_k t, e^{\lambda_k t} \operatorname{sen} \mu_k t, te^{\lambda_k t} \cos \mu_k t, te^{\lambda_k t} \operatorname{sen} \mu_k t, \ldots, t^{l_k - 1} e^{\lambda_k t} \cos \mu_k t,$$
$$t^{l_k - 1} e^{\lambda_k t} \operatorname{sen} \mu_k t\} \subset N[D^2 - 2\lambda_k D + (\lambda_k^2 + \mu_k^2)]^{l_k}$$

para $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l$. É com essas funções que se constrói a solução geral de qualquer EDO Linear Homogênea a coeficientes constantes. Essas funções constituem a “base” do **Cálculo Operacional** criado por Heaviside.

Exemplo: Obter a solução geral da EDO

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y + y = 0.$$

Utilizando o algoritmo de ***Briot-Rufini*** obtém-se que

$$p_L(r) = (r - 1)(r^3 - r^2 + r - 1) = (r - 1)^2 (r^2 + 1)$$

De modo que, as raízes são $r_1 = 1$,com multiplicidade 2 e $r_2 = i$, $r_3 = -i$, ambas com multiplicidade 1 e tem-se o seguinte conjunto fundamental

$$r_1 \to y_1(t) = e^t, y_2(t) = te^t \in N(D - I)^2$$
$$r_2 \to y_3(t) = \cos t, y_4(t) = \operatorname{sen} t \in N(D^2 + I)$$

uma vez que são soluções e

$$W[y_1, y_2, y_3, y_4](t) = -2e^{2t}(2 + \operatorname{sen} 2t) \neq 0, \forall t \in \circ$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$y_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t$$

Exemplo: Obter a solução geral da EDO

$$\frac{d^7 y}{dt^7} - 2\frac{d^5 y}{dt^5} + \frac{d^3 y}{dt^3} = 0.$$

Tem-se que

$$p_L(r) = r^3(r^4 - 2r^2 + 1) = r^3[(r-1)(r+1)]^2$$

Raízes e respectivas soluções ***l.i.*** associadas:

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0\,(multiplicidade\ 3) \rightarrow \{y_1(t) = 1, y_2(t) = t, y_3(t) = t^2\}\\
r_2 &= 1\,(multiplicidade\ 2) \rightarrow \{y_4(t) = e^t, y_5(t) = te^t\}\\
r_3 &= -1\,(multiplicidade\ 2) \rightarrow \{y_6(t) = e^{-t}, y_7(t) = te^{-t}\}
\end{aligned}$$

Solução Geral:

$$y_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + (c_4 + c_5 t)e^t + (c_6 + c_7 t)e^{-t}.$$

Exemplo: Obter a solução geral da EDO

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + y = 0.$$

Tem-se que

$$p_L(r) = r^4 + 1$$

Como

$$-1 = e^{\pi i} = e^{3\pi i} = e^{5\pi i} = e^{7\pi i}$$

Então as raízes são dadas por

$$\begin{aligned}
r_1 &= e^{\pi i/4} = \cos\tfrac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\\
r_2 &= e^{3\pi i/4} = \cos\tfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\tfrac{3\pi}{4} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\\
r_3 &= e^{5\pi i/4} = \cos\tfrac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\tfrac{5\pi}{4} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\\
r_4 &= e^{7\pi i/4} = \cos\tfrac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\tfrac{7\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\tfrac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Portanto são distintas (multiplicidade 1) sendo que r_3 e r_4 são conjugadas de r_1 e r_2 respectivamente. De modo que, obtém-se o seguinte conjunto fundamental real

$$\{y_1(t)=\mathrm{Re}(e^{r_1 t})=e^{t/\sqrt{2}}\cos\tfrac{t}{\sqrt{2}}\ ,\ y_2(t)=\mathrm{Im}(e^{r_1 t})=e^{t/\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\tfrac{t}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{y}_3(t)=\mathrm{Re}(e^{r_2 t})=e^{-t/\sqrt{2}}\cos\tfrac{t}{\sqrt{2}}\,,\ y_4(t)=\mathrm{Im}(e^{r_2 t})=e^{-t/\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\tfrac{t}{\sqrt{2}}\}$$

Solução Geral:

$$y_h(t)=e^{t/\sqrt{2}}(c_1\cos\tfrac{t}{\sqrt{2}}+c_2\,\mathrm{sen}\tfrac{t}{\sqrt{2}})+e^{-t/\sqrt{2}}(c_3\cos\tfrac{t}{\sqrt{2}}+c_4\,\mathrm{sen}\tfrac{t}{\sqrt{2}}).$$