Conforme foi visto é muito simples se obter a solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem a coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

em termos das funções algébricas e transcendentes elementares

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, e^{\lambda t}\cos\mu t, e^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\mu t.$$

Já no caso não-homogêneo

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

isso nem sempre é possível, pois depende de $f(t)$. Nos casos em que $f(t)$ não é um quase-polinômio, utilizando-se o método da variação dos parâmetros, o que se obtém é solução geral na forma de uma integral definida.

De modo que, já seria de se esperar um aumento no grau de dificuldade para se obter a solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem a coeficientes variáveis mesmo no caso homogêneo

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0.$$

Isso talvez não tenha ficado muito evidente, pois no caso muito particular da equação de Euler a solução geral ainda pode ser dada em termos de funções elementares. Entretanto, no caso geral, invariavelmente a solução geral tem de ser dada através de novas funções transcendentes, denominadas funções especiais, as quais só podem ser expressas numa representação infinita: seja em séries infinitas, seja em frações contínuas ou seja através de integrais definidas. Na verdade, as funções transcendentes podem ser divididas em duas classes: as que,como as funções de Bessel, são soluções de EDO's e as que, como a ***função Zeta de Riemann***, não satisfazem nenhuma EDO. No presente capítulo, nos ateremos as EDO's cuja solução geral pode ser representada através de séries infinitas, mais especificamente séries de potência.

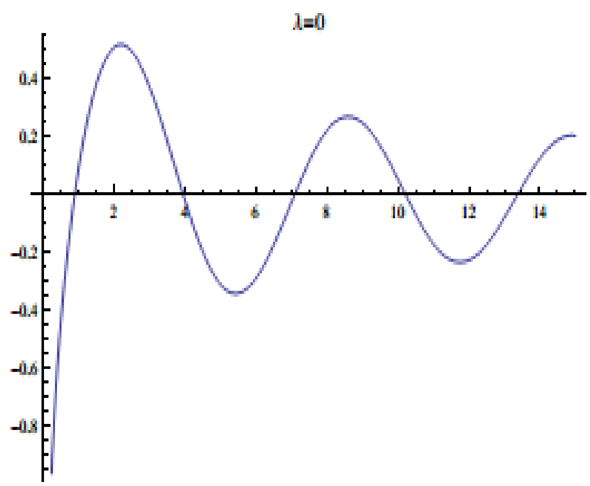
Alguns exemplos importantes de EDO's da Física-Matemática são

Equação de Cauchy-Euler

$$a(x-x_0)^2 y'' + b(x-x_0)y' + cy = 0 \quad , \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

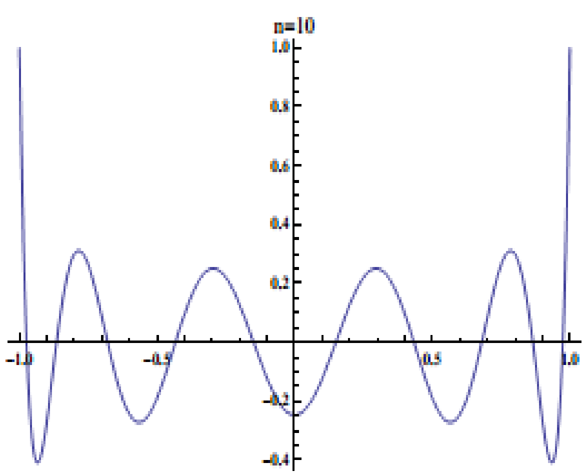
Equação de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \quad , \lambda \in \mathbb{R}.$$



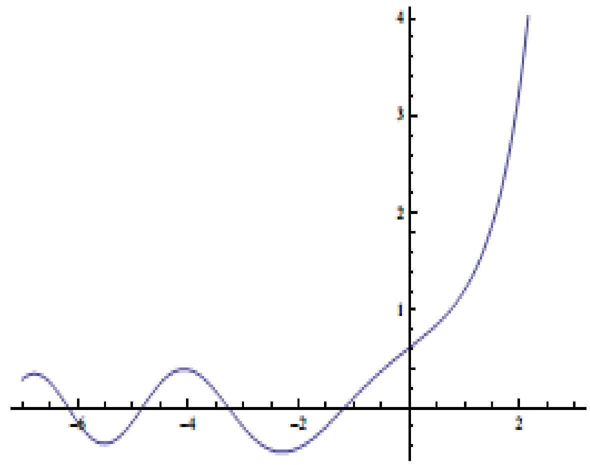
Equação de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad , \lambda \in \mathbb{R}.$$



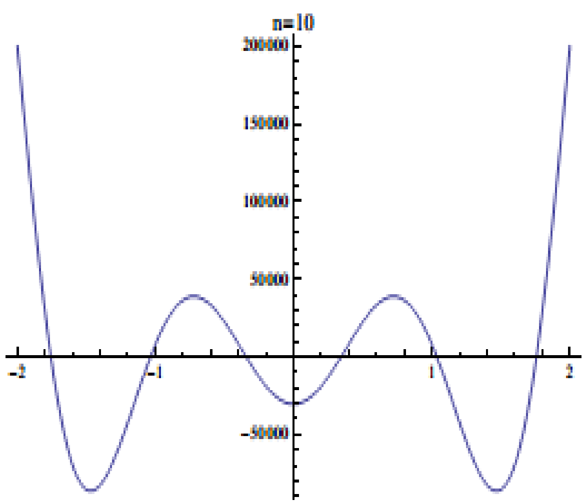
Equação de Airy

$$y'' - \lambda xy = 0 \quad , \lambda \in \mathbb{R}.$$



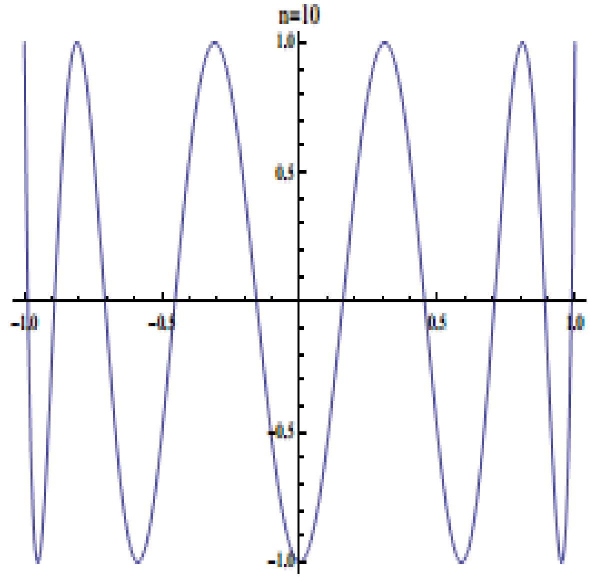
Equação de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad , n \in \mathbb{N}.$$



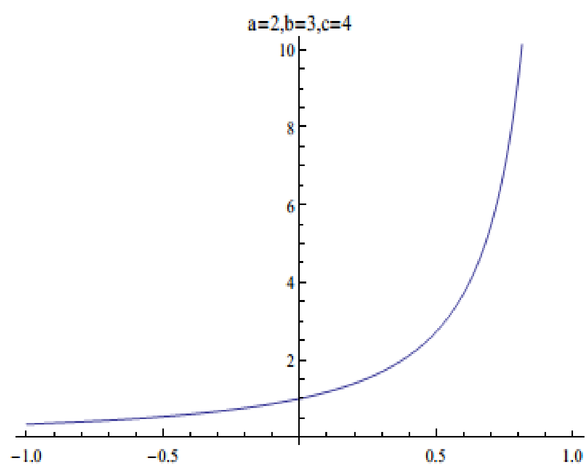
Equação de Chebyshev

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \quad , n \in \mathbb{N}.$$



Equação Hipergeométrica

$$x(1-x)y''+(c-(a+b+1)x)y'-aby=0 \quad , \ a,b,c\in\mathbb{R}$$



OBS: Todas as EDO's acima possuem coeficientes polinomiais. Isso ocorre na maioria das EDO's da Física-Matemática. De modo que, poderíamos nos restringir as EDO's com

coeficientes polinomiais, apesar do método das séries de potências se aplicar a EDO's com coeficientes não polinomiais.

Definição: Dada a EDO

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0 \quad (LH)$$

onde $a(x), b(x), c(x)$ não possuem fatores comum da forma $(x - x_0)^k$, onde *k* é um inteiro positivo. Tem-se que

(i) x_0 é um ***ponto ordinário*** se $a(x_0) \neq 0$.

(ii) x_0 é um ***ponto singular*** $a(x_0) = 0$.

OBS: Como queremos a proteção do **T. E. U.** estamos supondo que *(LH)* possui coeficientes contínuos em algum intervalo comum $]\alpha, \beta[$. De modo que, se x_0 é um ponto ordinário en tão existe um subintervalo no qual $a(x) \neq 0$.Neste subintervalo pode ser posta na forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

e aplicando o **T. E. U.** obtemos a existência e unicidade de solução para qualquer par de dados iniciais

$$y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y_1$$

tomados em x_0.

OBS: Se x_0 é um ponto singular, então pelo menos um dos nº $b(x_0), c(x_0)$ é diferente de zero. De modo que, pelo menos um dos coeficientes $p(x), q(x)$ fica ilimitado quando $x \to x_0$ e não se pode aplicar o **T.E.U.**

REVISÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

A mais simples série de potências é uma função polinomial

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n .$$

Esta é uma representação finita. Do Cálculo aprendemos que as funções elementares podem ser representadas na forma infinita através de séries de potências. Alguns exemplos são

$$e^x = 1 + x + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad , -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad , -\infty < x < \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , -1 < x < 1$$

Uma representação mais geral é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ .$$

Neste caso diz-se que a função foi expandida em série em torno do ponto x_0. Nas expansões acima tem-se que $x_0 = 0$. Relembramos os seguintes resultados

1.Uma série de potências converge num ponto $x = \tilde{x}$ se

$$\exists \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} a_n (\tilde{x} - x_0)^n \ .$$

Toda série converge em $x = x_0$, podendo convergir em todo $x \in \mathbb{R}$, ou apenas em alguns $x \in \mathbb{R}$.

2. Uma série converge absolutamente num ponto x se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n (x - x_0)^n \right|$$

for convergente. Tem-se que conv. absoluta $\Rightarrow$ convergência.A recíproca não é necessariamente verdadeira.

3. Teste da Razão: critério para verificação da convergência absoluta. Se $a_n \neq 0, \forall n \geq 1$ e se para algum valor de x

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = \left| x - x_0 \right| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

então a série converge absolutamente no ponto x se $L<1$ e diverge se $L>1$. Se $L=1$, o teste não é conclusivo.

4. Intervalo de Convergência: existe um real $\rho \geq 0$, denominado **raio de convergência**, tal que a série converge absolutamente em $|x-x_0|<\rho$ e diverge em $|x-x_0|>\rho$.Se a série só converge em x_0, o raio de convergência é zero. Se a série converge em todos os reais, o raio de convergência é infinito.Se $\rho>0$,o intervalo $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ é o **intervalo de convergência**.

A série pode convergir ou divergir em $|x-x_0|=\rho$.

5. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ forem convergentes em $|x-x_0|<\rho$.Então, tem-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$$

e

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}\right)(x-x_0)^n$$

são convergentes em $|x-x_0|<\rho$. Além disso, se $b_0 \neq 0$, então

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

onde c_n pode ser obtido através de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k}\right)(x-x_0)^n,$$

sendo que o raio de convergência pode ser menor que ρ.

6. Suponha que $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge em $\alpha<x<\beta$. Então

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}\left(a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

e assim sucessivamente, sendo que cada série converge absolutamente em $\alpha<x<\beta$. Além disso, tem-se a seguinte relação

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

e a série é chamada ***série de Taylor*** de f em torno de $x = x_0$.

OBS: Dada uma função $f(x)$ contínua possuindo derivadas de todas as ordens em $|x - x_0| < \rho$, $f(x)$ pode sempre ser representa-

da por uma série de potências convergente em $|x - x_0| < \rho$? Ou seja, quando se tem que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \text{ , em } |x - x_0| < \rho\,?$$

Definição: Uma função cuja série de Taylor converge em $|x - x_0| < \rho$ é dita ser ***analítica*** em $x = x_0$.

SOLUÇÃO EM SÉRIE NA VIZINHANÇA DE UM PONTO ORDINÁRIO

Dada a EDO

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (1)$$

analisaremos o problema de sua resolução em uma vizinhança de um ponto ordinário $x = x_0$ através do emprego de séries de potências.No caso de coeficientes e lado direito polinomiais o candidato natural seria um polinômio.No caso geral, assumindo que os coeficientes lado direito são analíticos em torno de $x = x_0$, o candidato será uma série de potências. De modo que, existem duas questões que precisam ser consideradas:

- Como determinar formalmente os coeficientes da série?
- Qual será o raio de convergência da solução obtida?

Utilizando o fato de $x = x_0$ ser um ponto ordinário, a EDO pode ser posta na forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (2)$$

Então se os coeficientes e lado direito puderem ser expandidos em séries de potências em algum intervalo em torno de x_0, ou seja se

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n, q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n, r(x)=\sum_{n=0}^{\infty}r_n(x-x_0)^n$$

Tentaremos uma solução na forma

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n .$$

Exemplo: Obter a solução geral da EDO

$$y''+y=0 \ , \ -\infty<x<\infty.$$

Como $a(x)=1$ então a EDO não possui pontos singulares em$\mathbb{R}$. De modo que, podemos tomar $x_0=0$ e

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n .$$

Derivando termo a termo obtém-se que

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1} \text{ e } y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} .$$

Substituindo na EDO segue-se que

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0.$$

Transladando o índice na primeira série de *n* para *n+2*, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\right]x^n=0 .$$

O que ocorre se só se

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \ , \forall n \geq 0.$$

Esta equação se chama ***relação de recorrência***. Como a um descompasso de 2 entre os índices dos coeficientes, os coeficientes pares e ímpares são determinados separadamente. Tem-se que

$$a_2 = -\frac{a_0}{2.1} = -\frac{a_0}{2!} \ , \ a_4 = -\frac{a_2}{4.3} = \frac{a_0}{4!} \ , \ a_6 = -\frac{a_4}{6.5} = -\frac{a_0}{6!} \ ,...$$

e

$$a_3 = -\frac{a_1}{2.3} = -\frac{a_1}{3!} \ , \ a_5 = -\frac{a_3}{5.4} = \frac{a_1}{5!} \ , \ a_7 = -\frac{a_5}{7.6} = -\frac{a_1}{7!} \ ,...$$

Utilizando-se indução finita conclui-se que

$$a_n = \begin{cases} a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 \\ a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1 \end{cases} , n = 1,2,3,...$$

Portanto, a solução geral será dada por

$$y(x) = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 + ... + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + ...$$

ou seja

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + ... \right] + a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + ... \right] \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Agora que obtivemos a solução formal, devemos estudar a convergência das séries obtidas. Utilizando o **Teste da Razão**, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2(n+1)}x^{2(n+1)}}{a_{2n}x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}a_0x^{2(n+1)}/(2n+2)!}{(-1)^n a_0 x^{2n}/(2n)!}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} =$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2(n+1)+1}x^{2(n+1)+1}}{a_{2n+1}x^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}a_1x^{2n+3}/(2n+3)!}{(-1)^n a_1 x^{2n+1}/(2n+1)!}\right| = |x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = 0 < 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

De modo que, podemos definir duas soluções da EDO em toda reta

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{e} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \,.$$

Observamos que

$$y_1(0) = 1 \,, y_1'(0) = 0 \;\text{ e }\; y_2(0) = 0 \,, y_2'(0) = 1$$

Então, aplicando Abel obtém-se que

$$W[y_1, y_2](x) = W[y_1, y_2](0)e^{\int_0^x 0dx} = 1 \,.$$

De modo que, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental para a EDO e, portanto, a solução geral é realmente dada por

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \;\;,\;\; a_0, a_1 \in R \,.$$

Na verdade, tem-se que

$$a_0 = y(0) \;\;,\;\; a_1 = y'(0) \,.$$

Logo, conclui-se que y_1 é a única solução do seguinte

$$PVI : \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

e que y_2 é a única solução do seguinte

$$PVI:\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Por outro lado, aprendemos no Cálculo que y_1 é a série de Taylor para $\cos x$ em $x_0 = 0$ e y_2 é a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ em $x_0 = 0$. De modo que, as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ podem ser definidas através de PVI's. Na verdade, a maioria das funções especiais da Física-Matemática é definida como soluções de PVI's. Para a maioria dessas funções não existe forma mais simples de defini-las.

Exemplo: Obter a solução geral da ***Equação de Airy***

$$y'' - xy = 0 \ , \ -\infty < x < \infty .$$

Tem-se que $p(x) = 0, q(x) = -x$ então a EDO não possui pontos singulares. Podemos tomar $x_0 = 0$ e como candidato a solução

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (1)$$

e supor que a série em $|x| < \rho$, sendo ρ determinado ***a posteriori***. Derivando (1) e substituindo na EDO obtém-se após deslocamento do índice

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Deslocando novamente o índice na segunda série, substituindo *n* por *n-1*, obtém-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

Finalmente "soltando" o primeiro termo da primeira série

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

De modo que, a relação de recorrência é dada por

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1} \;\;,\;\; n = 1,2,\ldots$$

sendo que

$$a_2 = 0$$

Agora o descompasso entre os índices é de três unidades e tem-se que

$$0 = a_2 = a_5 = a_8 = \ldots\,.$$

Novamente obtém-se uma dicotomia entre os coeficientes

$$a_3 = \frac{a_0}{2.3} \;\;,\;\; a_6 = \frac{a_3}{5.6} = \frac{a_0}{2.3.5.6} \;\;,\;\; a_9 = \frac{a_6}{8.9} = \frac{a_0}{2.3.5.6.8.9} \;\;,\ldots$$

ou seja

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot (3n-4)(3n-3)(3n-1)(3n)} \;\;, n = 1,2,\ldots$$

Por outro lado,

$$a_4 = \frac{a_1}{3\cdot 4} \;\;,\;\; a_7 = \frac{a_4}{6.7} = \frac{\mathrm{a}_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} \;\;,\;\; a_{10} = \frac{a_7}{9\cdot 10} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10},\ldots$$

ou seja

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-3)(3n-2)(3n)(3n+1)} \;\;, n = 1,2,\ldots$$

De modo que,

$$y(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (3n-1)(3n)}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (3n)(3n+1)}\right] (2)$$

donde obtém-se novamente que

$$y(0) = a_0 \text{ e } y'(0) = a_1\,.$$

Análise da convergência das séries: utilizando o teste da razão, conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{3(n+1)}/2\cdot 3\cdot\ldots\cdot[3(n+1)-1][3(n+1)]}{x^{3n}/2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n)}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n)(3n+2)(3n+3)} =$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n+2)(3n+3)} = 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, a primeira série converge em toda reta. O mesmo acontecendo com a segunda série. Definindo as funções analíticas

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n)} \text{ e } y_2(x) = \sum_{n=0}\frac{x^{3n+1}}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n)(3n+1)}$$

obtém-se que y_1 é a única solução do seguinte

$$PVI:\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

e y_2 é a única solução do

$$PVI:\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

Além disso, tem-se que

$$W[y_1, y_2](x) = W[y_1, y_2](0) = 1 \quad , \ \forall x \in R.$$

De modo que, $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental para a EDO de Airy e a solução geral é dada por (2). As funções y_1 e y_2 não são funções transcendentes elementares do Cálculo.

Exemplo: Obter a solução geral da EDO de Airy em uma vizinhança de $x_0 = 1$.

Como $x_0 = 1$ é ponto ordinário podemos tomar como candidato

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

em algum intervalo de convergência $|x-1| < \rho$. Tem-se que

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-1)^n$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} (x-1)^n$$

Substituindo obtém-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} (x-1)^n - x\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} (x-1)^n = 0 .$$

Tomando o desenvolvimento de Taylor de x em torno de $x_0 = 1$, obtém-se que

$$x = 1 + (x-1).$$

Substituindo obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} (x-1)^n - [1+(x-1)]\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} (x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} = 0$$

Soltando o primeiro termo nas duas primeiras séries e transladando o índice na última série chega-se a

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n - a_{n-1} \right] (x-1)^n = 0.$$

De modo que, a relação de recorrência é dada por

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1} \quad , \; n \geq 1.$$

Logo,

$$a_2 = \frac{a_0}{2} \; , \; a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6} \; , \; a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12} \; , \; a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_1}{120} + \frac{a_0}{30} \; ,...$$

O que leva a seguinte solução geral

$$y(x) = a_0 + a_1(x-1) + \frac{a_0}{2}(x-1)^2 + \left(\frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6}\right)(x-1)^3 + \left(\frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}\right)(x-1)^4 + \ldots$$

ou seja

$$y(x) = a_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \ldots\right] + a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \ldots\right]$$

OBS: Em geral quando a fórmula de recorrência possui mais de dois termos, a determinação de a_n em função de a_0 e a_1 pode se tornar muito difícil e até mesmo impossível. Sem esta dependência não podemos verificar a convergência das séries através de um método direto, como ,por exemplo, o **teste da razão**.

OBS: Quando se tenta uma solução na forma de série de potências de $(x - x_0)$ então os coeficientes da EDO devem ser representados também em potências de $(x - x_0)$.

O seguinte resultado devido a Immanuel Lazarus Fuchs, obtido em 1866, delimita o que pode ser feito no caso de pontos ordinários para uma vasta classe de EDO' s

Teorema: (***Fuchs***)

Dada uma EDO linear normal de ordem *n*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x). \text{ (LN)}$$

Hipóteses:

(H1) $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x), f(x)$ analíticas em $\alpha < x < \beta$.

(H2) Existe $\rho > 0$ tal que as expansões em série de potências de

$a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x), f(x)$ são convergentes em $|x - x_0| < \rho$.

Tese:

Toda solução de (LN) é analítica em x_0 com intervalo de convergência

$|x - x_0| < \rho$.

OBS: No caso *n* = 2, o teorema pode ser posto do seguinte modo: A solução geral de (LN) é dada por

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

onde a_0, a_1 são arbitrários e y_1, y_2 são soluções na forma de séries infinitas linearmente independentes, analíticas em x_0, sendo que o raio de convergência de cada série é pelo menos tão grande quanto o menor dos raios de convergência das séries representando os coeficientes e o lado direito □