CONCEITOS BÁSICOS

Definição: Uma **E**quação **D**iferencial **O**rdinária (**EDO**) de ordem ***n*** é uma igualdade do tipo

$$\boxed{F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0} \qquad (1)$$

Onde *F* é uma função de *n+2* variáveis e $y^{(n)}(x)=\dfrac{d^n y}{dx^n}(x)$.

OBS: Quando se pode explicitar a n-ésima derivada, $y^{(n)}$, na equação acima obtem-se a seguinte EDO

$$\boxed{y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})} \qquad (2)$$

A qual é denominada ***forma normal*** de (1).

OBS: O teorema da função implícita nos diz que a condição para que se possa reduzir uma EDO à sua forma normal é que se tenha *F* diferenciável com $\partial F/\partial y^{(n)}$ não identicamente nula.

OBS: Pode acontecer de se ter várias EDO's do tipo (2) associadas a apenas uma EDO do tipo (1). Como mostra o seguinte

Exemplo: Reduzir a EDO de 1ª ordem

$$2(y')^2-10y'+12=0$$

a forma normal.

Tem-se que $F(t,y,y')=2(y')^2-10y'+12$ é uma função diferenciável na variável y' e $\partial F/\partial y'=4y'-10$ só se anula em $y'=5/2$ logo não é identicamente nula. Portanto, pode ser reduzida e obtemos que

$$2(y')^2-10y'+12=2(y'-2)(y'-3)$$

Ou seja, a EDO possui duas EDO's normais associadas a ela

$$y'=2 \quad \text{e} \quad y'=3$$

Exemplos:

$$e^{\cos y''} - \cos(e^{y'}) + \log\left|\frac{y+x}{x}\right| = 0 \text{ , } y' = \mathrm{tg}(\frac{1}{y}) \text{ , } ay'' + by' + cy = 0 \text{ , } y' + p(x)y = 0$$

OBS: Uma pergunta que se pode fazer é porque estudar a teoria das EDO's?Para respondermos de maneira convincente basta observar que qualquer "**lei"** postulada pelo ser humano só possui aplicabilidade científica quando pode ser "matematizada",isto é, quando pode ser expressa através de equações!No caso das três leis fundamentais da Física Clássica, Newton necessitou criar o Cálculo Diferencial e Integral para poder expressar matematicamente suas leis, como é o caso da 2ª lei, que estabelece a conexão entre a aceleração de uma partícula e a força que produz seu movimento.

$$\boxed{m.\mathbf{a} = \mathbf{F}_{resul\,\mathrm{tante}}}$$

No caso unidimensional obtemos

$$m\ddot{y} = F_{resul\,\mathrm{tante}}$$

Utilizando a notação mais apropriada de Leibniz, obtemos que

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt})$$

Que é uma EDO de 2ª ordem facilmente normalizável.

Definição: Uma solução de uma EDO de ordem $\boldsymbol{n}$ em um intervalo $]a,b[$ da reta é uma função

$$\varphi:]a,b[\ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tal que as derivadas $\varphi^{(k)}, k = 1,...,n$ existem em $]a,b[$ e satisfazem a equação

$$F(t, \varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n)}) = 0 \ \ , \forall t \in]a,b[$$

Ou a equação

$$\varphi^{(n)} = f(t, \varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n-1)}) \ \ , \forall t \in]a,b[$$

Equações diferenciais de 1ª ordem

Conforme já foi observado, uma grande parte de EDO's pode ser normalizada. Além disso, os fundadores da teoria; Leibniz, Newton e os irmãos Bernoulli logo perceberam que a maioria dos métodos de resolução por eles criados exigiam que a EDO fosse normal. Por isso nos restringiremos as EDO's de 1ª ordem normais:

$$\boxed{y' = f(x,y)} \qquad (3)$$

Iniciaremos com a subclasse mais simples e profundamente ligada ao resultado central do Cálculo Diferencial e Integral: o **Teorema Fundamental do Cálculo** (**TFC**).

1.1 EDO Fundamental de 1ª ordem

$$\boxed{y' = f(x) \quad ,a < x < b} \qquad (4)$$

Neste tipo de EDO a "mudança", dada por $f(x)$, depende apenas da variável independente.Seu método de resolução é uma aplicação imediata do TFC, exigindo que f seja integrável em $]a,b[$.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é derivável em $]a,b[$, $F'(x) = f(x), \forall x \in]a,b[$ e $F(a) = 0$.

TFC: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Seja F uma primitiva de f, então

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt \quad ,\forall x \in [a,b].$$

Aplicação do TFC a EDO Fundamental:

$$\boxed{y' = f(x), a < x < b \Leftrightarrow y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)dt, \forall x \in [a,b]} \qquad (5)$$

Para qualquer x_0 fixo em $[a,b]$.

OBS: A EDO (4) possui uma infinidade de soluções! De fato, para cada valor da constante $y(x_0)$, tem-se que $y(x)$ dado por (5) é uma solução.

Na teoria das Equações Diferenciais o problema mais importante é, sem dúvida, o **existencial**, ou seja, saber quando pelo menos uma solução existe antes de se aplicar qualquer método de resolução. Uma vez obtida a existência de soluções surge o problema da **unicidade** da solução obtida, ou seja, saber se ela é única.

No caso da EDO fundamental acima basta particularizarmos a constante $y(x_0)$ para obtermos a unicidade da solução. Com isto somos levados, por **A. Cauchy**, a montarmos o protótipo de "quase" todo Modelo Matemático; um **Problema de Valor Inicial** (**PVI**) ou um **Problema de Cauchy**:

$$\boxed{PVI:\begin{cases} y' = f(x), a < x < b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}} \qquad (6)$$

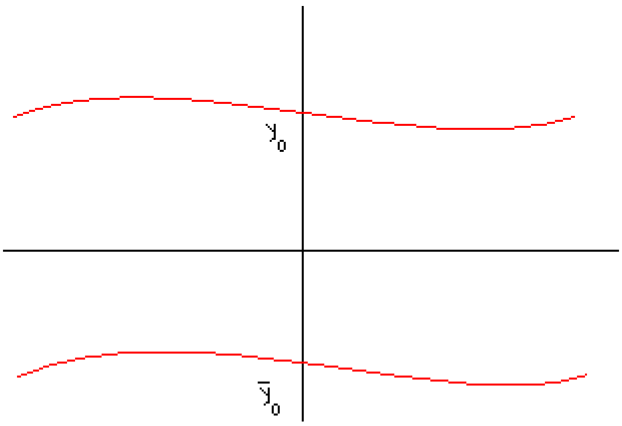
Onde x_0 foi tomado em $[a,b]$ e y_0 foi o valor escolhido para constante de integração $y(x_0)$, neste caso y_0 é denominado **valor inicial**.

De modo que, pelo o que foi visto, o **PVI** acima possui uma única solução dada por

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx \quad , a < x < b} \qquad (7)$$

Definição: A solução $y(x)$ dada por (7) denomina-se **curva integral.**

Interpretação gráfica:

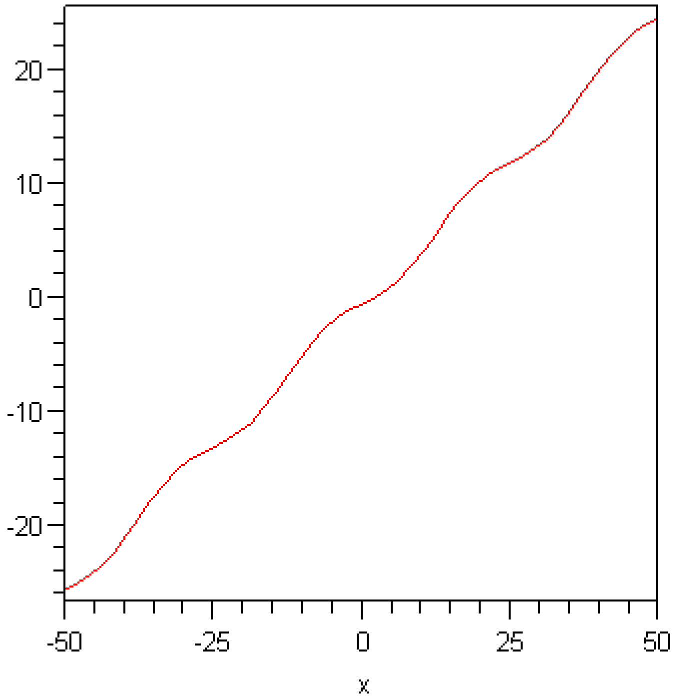


Exemplo: Resolva o seguinte

$$PVI:\begin{cases} y' = \operatorname{sen}^2 x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

Resolver esse PVI é encontrar a única primitiva que satisfaz a condição inicial dada. Integrando a EDO obtem-se que

$$y(x) = \int_{\pi}^{x} \operatorname{sen}^2 t dt = y(\pi) + \int_{\pi}^{x} \frac{(1-\cos 2t)}{2} dt = 1 + \left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_{\pi}^{x} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$



1.2 EDO Autônoma

$$\boxed{y' = f(y) \quad ,a < x < b} \qquad (8)$$

São EDO's que descrevem mudanças que dependem apenas da variável dependente. Se $f(y)$ não se anula em um intervalo $]c,d[$ utilizando a notação devida a Leibniz podemos reduzir (8) à uma EDO fundamental. De fato, tem-se que

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(y) \quad ,a < x < b \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad ,c < y < d} \qquad (9)$$

logo pelo **TFC**

$$\boxed{x(y) = x(y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(s)} ds}$$

Para algum y_0 tomado em $]c,d[$. Mas agindo assim nós resolvemos o **problema inverso**! O que a EDO (8) está propondo é que se conheça como *y* depende de *x* e não o contrario! Entretanto, como se tem

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(y)}\neq 0 \quad ,c<y<d$$

Então pelo **Teorema da Função Inversa** existe a inversa da função *x*(*y*) e sua derivada é o inverso da derivada de *y*(*x*).

OBS: Teorema da Função Inversa:

Seja $f:]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$ uma função crescente (ou decrescente) em $]\alpha,\beta[$. Se *f* for derivável em $]\alpha,\beta[$ e $f'(x)\neq 0,\forall x\in]\alpha,\beta[$,então a função inversa $f^{-1}:f(]\alpha,\beta[)\to]\alpha,\beta[$ é derivável no intervalo $f(]\alpha,\beta[)$ e

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y)=\frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(y))},\forall y\in f(]a,b[)$$

De modo que, a solução do

$$\boxed{PVI:_0\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(y),a<x<b\\ f(x_0)=y_0\end{cases}}$$

Pode ser obtida através da inversão da solução do

$$\boxed{PVI:\begin{cases}\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f(y)},c<y<d\\ x(y_0)=x_0\end{cases}}$$

E vice-versa; a solução do problema inverso pode ser obtida através da inversão do problema direto.

Exemplo: Seja a EDO

$$\boxed{y'=ky \quad ,-\infty<x<\infty}$$

com $k\neq 0$.Tem-se que $f(y)\neq 0,\forall y\neq 0$. De modo que, a EDO pode ser reduzida a uma EDO fundamental em $0<y<\infty$ ou $-\infty<y<0$. Escolhendo o primeiro intervalo obtem-se que

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{ky},0<y<\infty \Leftrightarrow x(y)=x(y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{1}{ks}ds,\forall y_0\in]0,\infty[$$

Ou seja,

$$x(y)=x(y_0)+\frac{1}{k}(\ln y-\ln y_0)$$

Como a solução obtida é inversível (e é fácil obter sua inversa) invertendo obtem-se que

$$\boxed{y(x)=y(x_0)e^{k(x-x_0)},-\infty<x<\infty}$$

onde $x(y_0)=x_0$.

OBS: Para aplicação desse método é necessário que o intervalo de definição da variável dependente, $y(x)$, não contenha pontos onde $f(y)$ se anule. Os pontos $y^{\#}$ onde $f(y^{\#})=0$ (os zeros de f) são denominados ***pontos críticos*** ou ***pontos estacionários*** da EDO. O PVI associado a uma tal EDO, com condição inicial $y(x_0)=y^{\#}$, possui como solução a função constante $y\equiv y^{\#}$ denominada ***solução estacionária*** ou ***solução de equilíbrio***.

1.3 EDO Separada

$$\boxed{y'=f_1(x)f_2(y) \quad ,a<x<b} \qquad (10)$$

Teorema: Seja $f_1(x)$ contínua em $a<x<b$ e $f_2(y)$ contínua e não nula em $c<y<d$. Então existe uma única solução da EDO (10) passando por cada ponto do retângulo $R:(x,y)\in]a,b[\times]c,d[$.

Prova: primeiro provaremos a unicidade. Supondo que $y=\varphi(x)$ satisfaz (10)e a condição inicial $\varphi(x_0)=y_0$. Então, tem-se que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x)=f_1(x)f_2(\varphi(x))$$

ou seja

$$\frac{d\varphi(x)}{f_2(\varphi(x))}=f_1(x)dx$$

Integrando ambos os lados entre x_0 e x obtem-se que

$$\int_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)=y} \frac{d\varphi(\eta)}{f_2(\varphi(\eta))} = \int_{x_0}^{x} f_1(\xi) d\xi$$

De modo que,

$$F_2(\varphi(x)) - F_2(y_0) = F_1(x) - F_1(x_0) \quad (11)$$

Entretanto, como $F_2(y)$ é estritamente monótona, pois é a primitiva de $1/f_2(y)$, então é inversível e podemos obter uma única $\varphi(x)$ dada por

$$\varphi(x) = F_2^{-1}[F_2(y_0) + F_1(x) - F_1(x_0)] \quad (12)$$

Então, assumindo que (10) possui solução passando pelo ponto (x_0, y_0), concluímos que essa solução é dada por (12) de maneira única.

Para provar a existência de uma solução de (10) passando pelo ponto (x_0, y_0), basta provar que a função $\varphi(x)$ dada por (12) satisfaz a EDO (em uma vizinhança de x_0) e passa pelo ponto (x_0, y_0). Derivando (11) em relação à x obtem-se que

$$\frac{dF_2(\varphi(x))}{d\varphi(x)} \varphi'(x) = F_1'(x) \quad , a < x < b$$

ou seja

$$\frac{1}{f_2(\varphi(x))} \varphi'(x) = f_1(x) \quad , a < x < b$$

ou seja

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = f_2(\varphi(x)) f_1(x) \quad , a < x < b$$

Por outro lado, fazendo $x=x_0$ em (12) obtem-se que $\varphi(x_0) = F_2^{-1}[F_2(y_0)] = y_0$. $\rightleftarrows$

OBS: Se $f_2(y)=0$ para algum $y=y_1$ então pode-se perder a unicidade da solução, dependendo da convergência ou não da seguinte integral

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f_2(\eta)} \quad (13)$$

Quando y se aproxima de y_1. Se a integral converge então um número infinito de curvas integrais passam através de certos pontos do retângulo R e elas são todas tangentes a solução estacionária $y \equiv y_1$. Por outro lado, se a integral (13) diverge quando $y \to y_1^{\pm}$ então existe sempre uma única curva integral passando através de cada ponto (x_0, y_0) de R.

Exemplo: Investigue o comportamento das curvas integrais das seguintes EDO' s:

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} \quad , y' = \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x} \quad , y' = \sqrt[3]{\frac{x}{y}} \quad , y' = \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \ .$$

1.4 EDO Homogênea

$$\boxed{y' = f(\frac{y}{x}) \quad , a < x < b} \qquad (14)$$

Definição: Uma função *f*(*x*, *y*) é dita ser ***homogênea de grau n*** se

$$\boxed{f(tx, ty) = t^n f(x, y), \forall t \in \mathbb{R}}$$

OBS: Se *f*(*x*, *y*) é homogênea de grau zero então

$$f(tx, ty) = f(1, \frac{y}{x}) \triangleq f(\frac{y}{x})$$

Definição: Uma EDO normal de 1ª ordem é **homogênea** se descreve uma mudança dada por uma função homogênea de grau zero, ou seja se pode ser posta na forma (14).

Método de resolução: (**Leibniz**, 1691)

Fazendo a mudança $\boxed{y = zx}$ na EDO obtem-se que

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}$$

Que é uma EDO separada na variável *z*.

1.4 EDO Linear de 1ª ordem

$$\boxed{a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad , a < x < b} \qquad (15)$$

As EDO' s lineares de 1ª ordem constituem a subclasse mais importante de EDO' s de 1ª ordem por dois motivos: aparecem com maior freqüência nas aplicações e deu origem a métodos e conceitos que acabaram constituindo uma das teorias mais importantes na Matemática (a **Teoria dos Operadores Lineares**). Em (15) tem-se $a(x) \quad 0$,em algum intervalo $]a, b[$, aonde se pode colocar a EDO na forma normalizável

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)} \qquad (16)$$

onde $p(x) = b(x)/a(x), q(x) = c(x)/a(x)$. O fato de se ter o termo independente $q(x)$ cria um impedimento para se aplicar o método desenvolvido para EDO separada. Entretanto, Leibniz considerou a EDO mais simples, obtida quando se toma $p(x)=p$ (constante), e observou que o lado esquerdo de (16) se transforma, após a multiplicação por uma determinada função, na derivada de um produto! De fato, tem-se que

$$\frac{d}{dx}(ye^{px}) = y'e^{px} + pye^{px} = (y' + py)e^{px}.$$

Com esta observação Leibniz descobriu a existência de um multiplicador

$$\boxed{\mu(x) = e^{px}} \qquad (17)$$

que torna a EDO (16) integrável nesse caso particular.A partir desse fato, Leibniz pode conjecturar se sempre existiria uma tal multiplicador $\mp(x) \quad 0$ que transformasse o lado esquerdo de (16) , com $p(x)$ arbitrário, na derivada do produto $\mp(x)y(x)$? Supondo que isto acontece, e multiplicando ambos os lados da EDO (16) pelo multiplicador, Leibniz foi levado à seguinte equação

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)[y' + p(x)y] = \mu(x)q(x)$$

ou seja

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)q(x) \qquad (18)$$

A EDO (18), sendo do tipo fundamental, pode ser integrada. Integrando, obtem-se que

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)q(x)dx + \frac{C}{\mu(x)}} \qquad (19)$$

onde C é a constante de integração. De modo que, se existir um tal multiplicador todas as soluções de (16) serão dadas por (19)!

Por outro lado, para que exista o multiplicador é necessário que

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)y' + \mu(x)p(x)y \Leftrightarrow \mu'y + \mu y' = \mu y' + \mu p(x)y \Leftrightarrow \mu'y = \mu p(x)y$$
$$\Leftrightarrow (\mu' - p(x)\mu)y = 0$$

onde a possibilidade $y = 0$ é satisfeita se só se $q(x)$=0. Logo,

$$\frac{d\mu}{dx} = p(x)\mu$$

que é uma EDO separada com $\mu(x) \neq 0$. Sendo assim

$$\frac{d\mu}{dx} = p(x)\mu \Leftrightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int p(x)dx + C \Leftrightarrow \ln|\mu| = \int p(x)dx + C \Leftrightarrow |\mu| = e^{\int p(x)dx + C}$$

ou seja

$$|\mu(x)| = C_1 e^{\int p(x)dx}, (C_1 = e^C > 0) \Leftrightarrow \mu(x) = \pm C_1 e^{\int p(x)dx}$$

Como $\mu(x)$ é um multiplicador para a EDO podemos tomar

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int p(x)dx}}$$

substituindo em (19) obtem-se que a ***solução geral*** da EDO é dada por

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + Ce^{-\int p(x)dx}} \qquad (20)$$

Resumo: Método do Fator Integrante;

Dada a EDO Linear $\boxed{a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad , a < x < b}$

Sua solução geral pode ser obtida através de

1) ponha a EDO na forma $y' + p(x)y = q(x)$

2) calcule o fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

3) multiplique a EDO e calcule a integral

$$\int \mu(x)q(x)dx$$

4) a solução geral é dada por

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)dx + C\right)$$

Exemplo: Obtenha a solução geral para

$$ty' + 5y = 3t$$

1) $y' + \dfrac{5}{t}y = 3 \quad , -\infty < t < 0 \;\text{ ou }\; 0 < t < \infty$

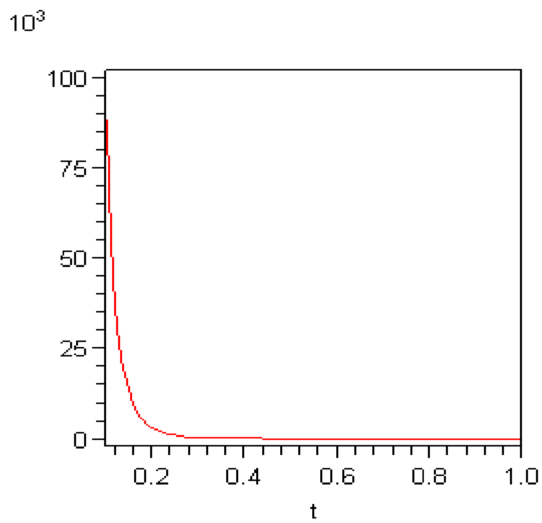
2) fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{5}{t}dt} = e^{5\ln|t|} = |t|^5 \Rightarrow \mu(t) = t^5 \quad ,0 < t < \infty$$

3) $(t^5 y)' = 3t^5 \Rightarrow t^5 y = \dfrac{1}{2}t^6 + C \Rightarrow y = \dfrac{t}{2} + \dfrac{C}{t^5}$

4) solução geral: $y = \dfrac{t}{2} + \dfrac{C}{t^5} \quad ,0 < t < \infty$

Gráfico: (C=1)



OBS: EDO' s lineares possuem a propriedade de suas soluções serem globais, isto significa que elas existem onde os coeficientes $p(t)$ e $q(t)$ são contínuos. Em particular se $p(t)$ e $q(t)$ forem contínuos em toda reta, então as soluções estarão definidas em toda reta. No exemplo acima as soluções existem em todo intervalo que não contenha a origem.

OBS: Dado um PVI associado a uma EDO linear de 1ª ordem, nós podemos obter sua solução através de uma integração definida. De fato, dado o

$$PVI:\begin{cases} a(t)y'+b(t)y=c(t), \alpha<t<\beta \\ y(t_0)=y_0, t_0\in]\alpha,\beta[\end{cases}$$

repetimos as mesmas etapas do método obtido, mudando apenas as integrações indefinidas por integrações definidas que incorporarão a condição inicial, ou seja tomaremos

$$\mu(t)=e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$$

Multiplicando a EDO por $\mu(t)$ e integrando de t_0 a t obteremos que

$$\mu(t)y(t)-\mu(t_0)y(t_0)=\int_{t_0}^{t}\mu(s)q(s)ds$$

sendo que $\mu(t_0)=1$. De modo que, a solução do PVI será dada por

$$y(t)=\frac{1}{\mu(t)}\left(\int_{t_0}^{t}\mu(s)q(s)ds+y_0\right)$$

Exemplo: Resolver o seguinte

$$PVI:\begin{cases} ty'+5y=3t, 0<t<\infty \\ y(1)=0 \end{cases}$$

1.5 EDO de Bernoulli

$$a(x)y'+b(x)y=c(x)y^n \quad ,\alpha<x<\beta \qquad (21)$$

onde $a(x)$,$b(x)$ e $c(x)$ são contínuas em $]\alpha,\beta[$ com $a(x)\neq0$ em $]\alpha,\beta[$ e $n\geq0$.

OBS:

(i) Se $x_0\in]\alpha,\beta[$ o ***PVI*** com condição inicial $y(x_0)=y_0$ possui uma única solução.

(ii) Se n=0 ou 1, (21) é uma EDO linear de 1ª ordem.

(iii) Se n=1, y=0 é uma solução de (21) chamada ***solução trivial***.

Método de resolução: (Leibniz 1696):

Colocando (21) na forma "normalizável"

$$y'+p(x)y=q(x)y^n$$

onde $p(x)=b(x)/a(x), q(x)=c(x)/a(x)$ tem-se que a mudança na variável dependente

$$\boxed{z=y^{1-n}}$$

reduz (21) a uma EDO linear de 1ª ordem. De fato, descartando a solução trivial obtemos que

$$y'+p(x)y=q(x)y^n \Rightarrow \frac{y'}{y^n}+p(x)y^{1-n}=q(x) \Rightarrow y^{-n}y'+p(x)z=q(x)$$

Por outro lado, pela **Regra da Cadeia**, tem-se que

$$z'=(1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y'=\frac{z'}{(1-n)}$$

Substituindo na EDO transformada somos levados a seguinte EDO linear de 1ª ordem

$$z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x) \qquad (22)$$

cujo fator integrante é dado por

$$\mu(x)=e^{\int(1-n)p(x)dx}$$

Multiplicando ambos os lados por μ e integrando obtem-se

$$z(x)=(1-n)\mu^{-1}(x)\int \mu(x)q(x)dx+C\mu^{-1}(x)$$

Retornando a variável dependente original concluímos que

$$\boxed{y(x)=\sqrt[1-n]{(1-n)\mu^{-1}(x)\int \mu(x)q(x)dx+C\mu^{-1}(x)}}$$

OBS: O expoente na EDO de Bernoulli (21) pode ser generalizado para qualquer valor real.

Exemplo: Modelo Matemático para o crescimento de peixes

Modelo proposto por ***von Bertalanffy***:

Hipótese: O peso $p(t)$ de cada espécie é regido pela seguinte equação obtida experimentalmente

$$\boxed{\frac{dp}{dt}=\beta p^{2/3}-\gamma p} \qquad \text{(vB)}$$

a qual estabelece que o aumento do peso de um peixe é proporcional a área de sua superfície.

Notação:

. β é a constante de anabolismo, representando a taxa de crescimento de massa por unidade de superfície.

. γ é a constante de catabolismo, representando a taxa de diminuição da massa por unidade de superfície.

A EDO (vB) é de Bernoulli com *n*=2/3. De fato, tem-se que

$$\boxed{\frac{dp}{dt}+\gamma p=\beta p^{2/3}}$$

Resolução: Fazendo a mudança

$$z=p^{1-2/3}=p^{1/3}$$

obtem-se a EDO linear

$$z'+\tfrac{\gamma}{3}z=\tfrac{\beta}{3}$$

De modo que,

$$\mu(t)=e^{\int(\gamma/3)dt}=e^{(\gamma/3)t}$$

Multiplicando ambos os lados da EDO por μ e integrando obtem-se que

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{\gamma}{3}t}z)=\tfrac{\beta}{3}e^{\frac{\gamma}{3}t}\Rightarrow e^{\frac{\gamma}{3}t}z=\tfrac{\beta}{\gamma}e^{\frac{\gamma}{3}t}+C\Rightarrow z=\tfrac{\beta}{\gamma}+Ce^{-(\gamma/3)t}$$

retornando a variável dependente original conclui-se que

$$p(t)=(\tfrac{\beta}{\gamma})^3(1+C\tfrac{\gamma}{\beta}e^{-(\gamma/3)t})^3$$

Condição inicial: na prática quando *t*=0 o valor de *p* é desprezível. Isso se traduz matematicamente como sendo *p*(0)=0. Com essa condição inicial se obtém que

$$0=(\tfrac{\beta}{\gamma})^3(1+C\tfrac{\gamma}{\beta})^3\Rightarrow C=-\tfrac{\beta}{\gamma}$$

Portanto,

$$\boxed{p(t)=(\tfrac{\beta}{\gamma})^3(1-e^{-(\gamma/3)t})^3\quad ,0<t<\infty}$$

esta é a "**Lei de Von Bertalanffy**" para o crescimento da massa de um peixe.

1.6 EDO de Riccati

$$\boxed{a(x)y' = b(x) + c(x)y + d(x)y^2} \qquad (23)$$

onde $a(x), b(x), c(x), d(x)$ são contínuas em $\alpha < x < \beta$ com $a(x) \neq 0$.

OBS: Se b = 0 então (23) é de Bernoulli com n =2.

Método de resolução: (±1724). Colocando na forma normal

$$\boxed{y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2}$$

onde $p(x) = b(x)/a(x), q(x) = c(x)/a(x), r(x) = d(x)/a(x)$ tem-se que no caso particular em que p,q,r são constantes a EDO se reduz a

$$y' = r(y - r_1)(y - r_2) \qquad (24)$$

onde r_1 , r_2 são raízes da equação do 2º grau dada pelo direito de (24). Neste caso, a EDO é autônoma sendo que sua solução é dada por

$$\int \frac{dy}{p + qy + ry^2} = t + C$$

Quando p,q,r não são constantes o caso é muito mais complicado e a única técnica que se conhece é parcial no sentido de que para se resolver (23) precisamos conhecer de antemão uma solução particular $y_p(x)$ de (23) para podermos obter a "solução geral".Neste caso, a solução geral será dada por

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + \frac{1}{v(x)}} \qquad (25)$$

De fato, substituindo (25) em (23) obtem-se que

$$\frac{d}{dx}\left(y_p + \frac{1}{v}\right) = p(x) + q(x)\left(y_p + \frac{1}{v}\right) + r\left(y_p + \frac{1}{v}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\frac{dy_p}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = p(x) + q(x)y_p + q(x)\frac{1}{v} + r(x)y_p^2 + 2r(x)\frac{y_p}{v} + r(x)\frac{1}{v^2} \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = q(x)\frac{1}{v} + 2r(x)\frac{y_p}{v} + r(x)\frac{1}{v^2} \Rightarrow \frac{dv}{dx} + [q(x) + 2r(x)y_p]v = -r(x)$$

que é uma EDO linear de 1ª ordem em v com fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int [q(x) + 2r(x)y_p(x)]dx}$$

De modo que, multiplicando a EDO por μ e integrando obtem-se que

$$\boxed{y(x) = y_p(x) - \frac{\mu(x)}{C + \int r(x)\mu(x)dx}}$$

1.7 EDO Exata

$$\boxed{M(x,y) + N(x,y)y' = 0} \qquad (26)$$

De todas as EDO' s de 1ª ordem as mais simples de se resolver são, sem dúvida, as da forma

$$\boxed{\frac{d}{dx}\Phi(x,y) = 0} \qquad (27)$$

Sua solução é dada por

$$\Phi(x,y) = C$$

onde algumas vezes é possível explicitar y como função de x. De modo que é muito importante sabermos quando uma EDO de 1ª ordem pode ser colocada na forma (27). Por outro lado, pela **Regra da Cadeia**, sabemos que

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y)\frac{dy}{dx} \qquad (28)$$

Portanto, uma primeira condição é que a EDO seja da forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (29)$$

Comparando (28) com (29) concluímos que uma segunda condição é que se tenha

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = M(x,y) \;\text{ e }\; \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = N(x,y)} \qquad (30)$$

Com isso somos levados a seguinte

Definição: Dada uma EDO da forma (29) diz-se que ela é do tipo ***exata*** se existe uma função $\Phi(x, y)$ satisfazendo (30).

O seguinte resultado nos dá as condições (necessárias e suficientes) para que uma EDO seja exata.

Teorema: (Condição de Euler)

Hipóteses: $M(x, y)$, $N(x, y)$ contínuas com derivadas parciais M_y e N_x contínuas em uma região Ω simplesmente conexa do plano (um retângulo, um disco, etc.).

Tese: Existe uma função $\Phi:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y)=M(x,y)\ \text{ e }\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y)=N(x,y)\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)}$$

para todo $(x,y)\in\Omega$.

Prova: ($\Rightarrow$): Supondo que existe $\Phi(x,y)$ possuindo derivadas parciais de segunda ordem contínuas satisfazendo (30), então

$$\frac{\partial}{\partial y}M=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}N$$

($\Leftarrow$): Seja a função

$$h=N(x,y)-\int M_y(x,y)dx$$

Tem-se que

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial M}{\partial y}dx=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$$

Logo $h=h(y)$, isto é h não depende de x. Então, definindo a função

$$\Phi(x,y)=\int M(x,y)dx+\int h(y)dy$$

obtem-se que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx+0=M(x,y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+\frac{d}{dy}\int h(y)dy=\int\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx+h(y)=N(x,y)\quad\blacksquare$$

Corolário: A solução geral de (29) é dada por

$$\Phi(x,y)=C$$

onde

$$\boxed{\Phi(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left(N(x,y)-\int M_y(x,y)dx\right)dy}$$

Exemplo: Obtenha a solução geral da EDO

$$3t^2y^4+4t^3y^3y'=0$$

Tem-se que

$$M(t,y)=3t^2y^4,N(t,y)=4t^3y^3\Rightarrow\begin{matrix}M_y(t,y)=12t^2y^3\\N_t(t,y)=12t^2y^3\end{matrix}\Rightarrow M_y=N_t,\forall(t,y)\in\mathbb{R}^2$$

Então existe $\Phi(t, y)$ tal que

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}=3t^2y^4 & (1)\\[2mm] \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=4t^3y^3 & (2)\end{cases}$$

Integrando (1) em relação a t, obtem-se que

$$\Phi(t,y)=\int 3t^2y^4dt+h(y)=t^3y^4+h(y) \qquad (3)$$

Por outro lado, derivando (3) em relação à y e utilizando (2) obtem-se que

$$4t^3y^3=4t^3y^3+h'(y)\Rightarrow h'(y)=0\Rightarrow h\equiv C$$

Retornando a (3) conclui-se que

$$\Phi(t,y)=t^3y^4+C$$

Portanto a solução geral é dada por

$$t^3y^4=C$$

1.7.1 Fator integrante

Mesmo quando uma EDO não é exata, algumas vezes é possível torná-la exata através de um multiplicador $\mu(x, y)$ que faz com que a EDO multiplicada

$$\mu(x,y)\left(M(x,y)+N(x,y)y'\right)=0 \qquad (31)$$

seja exata. O caso importante é quando se tem μ≠0. Neste caso, as soluções de (29) e (31) são as mesmas. Agora, pela condição de Euler, (31) é exata se só se

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(x,y)M(x,y)\big)=\frac{\partial}{\partial x}\big(\mu(x,y)N(x,y)\big)$$

ou seja

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x} \qquad (32)$$

OBS: A EDP (32) estabelece uma condição necessária e suficiente para que μ(*x*, *y*) seja um fator integrante para a EDO (29). Infelizmente não existe uma regra geral para se obter um fator integrante para uma determinada EDO.

As duas situações mais importantes, nas quais se podem obter fatores integrantes simples, ocorrem quando se tem que μ(*x*, *y*) é uma função apenas de uma das variáveis.

Caso 1: μ(*x*, *y*)=μ(*x*);

Neste caso (32) se torna

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{d\mu}{dx}\Rightarrow\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{M_y-N_x}{N} \qquad (33)$$

Na verdade o que nos indica se estamos nesse caso é o quociente do lado direito de (33). Se $(M_y$-$N_x)/N$ for uma função apenas de *x* então existirá um multiplicador ∓=∓(*x*). De fato, neste caso integrando (33) obtemos que

$$\log(\mu(x))=\int\frac{(M_y-N_x)}{N}dx$$

ou seja

$$\mu(x)=e^{\int(M_y-N_x)/N\;dx}$$

Caso 2: μ(*x*, *y*)=μ(*y*);

Neste caso, (32) se torna

$$\mu\frac{\partial N}{\partial x}=\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{d\mu}{dy}\Rightarrow\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=\frac{N_x-M_y}{M} \qquad (34)$$

Analogamente, o que nos indica a pertinência a esse caso é o lado direito de (34), se o quociente $(N_x - M_y)/M$ for uma função apenas de y então existirá um multiplicador $\mu=\mu(y)$ dado por

$$\mu(y) = e^{\int (N_x - M_y)/M \, dy}.$$

Exemplo: Resolver

$$xy + x^2 + 1 + x^2 y' = 0$$

Tem-se que

$$M(x,y) = xy + x^2 + 1, N(x,y) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} M_y = x \\ N_x = 2x \end{cases} \Rightarrow M_y \neq N_x$$

Mas

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{1}{x}$$

Logo,

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{x}\mu \Rightarrow \tilde{\mu}(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = x \Rightarrow \frac{d}{dx}(x\mu) = 0 \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x}$$

Com isso, obtem-se que

$$\mu\left[M + Ny'\right] = y + x + \frac{1}{x} + xy' = 0$$

é exata. Então, existe $\Phi(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = y + x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow \Phi(x,y) = \displaystyle\int (y + x + \frac{1}{x}) dx = yx + \frac{x^2}{2} + \ln|x| + h(y) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = x \end{cases}$$

De modo que,

$$x = N = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + \frac{dh}{dy} \Rightarrow \frac{dh}{dy} = 0 \Rightarrow h \equiv C$$

Assim, a solução geral é dada por

$$xy + \frac{x^2}{2} + \ln|x| = C$$

1.8 Método das Isóclinas

Dada uma EDO normal de 1ª ordem

$$\boxed{y' = f(x,y)} \qquad (35)$$

Tem-se que (35) estabelece um campo de direções (inclinações) no plano. Resolver (35) pode ser interpretado como obter todas as curvas (***curvas integrais***) cuja tangente em cada ponto é dada por $f(x, y)$.

Definição: O lugar geométrico dos pontos do plano onde cada reta tangente a curva integral preserva uma direção constante é denominado ***curva isóclina***.

OBS: Obtém-se as curvas isóclinas fazendo

$$f(x,y) = k \quad ,k \in \mathbb{R} \; .$$

A obtenção das curvas integrais, ou seja, dos gráficos das soluções de (35), pode se tornar impraticável devido ao fato de que muito poucas EDO's normais possuem algum método de resolução! Entretanto, com as curvas isóclinas e uma análise do sinal de y', pode-se obter uma "informação qualitativa " sobre as curvas integrais. Esta abordagem é o que se chama Método das Isóclinas. É um método geométrico!

Exemplo: Determinar o campo de direções criado pela EDO

$$y' = y - x^2$$

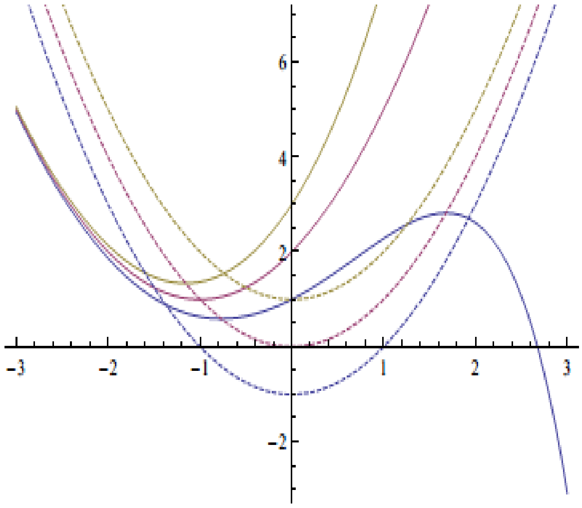
Isóclinas:

$$f(x,y) = c \Leftrightarrow y - x^2 = c \Leftrightarrow \boxed{y = x^2 + c \quad ,\forall c \in \mathbb{R}}$$

Análise do sinal de y':

$$y' > 0 \Leftrightarrow c > 0 \Leftrightarrow y > x^2$$
$$y' = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow y = x^2$$
$$y' < 0 \Leftrightarrow c < 0 \Leftrightarrow y < x^2$$

Análise gráfica:



OBS: Dada a EDO normal

$$y' = f(x,y)$$

A isóclina $f(x,y)=0$ fornece as curvas onde podem estar situados os pontos de máximo e mínimo das curvas integrais. O lugar geométrico dos pontos de inflexão são obtidos impondo-se que $y''=0$, o que só pode ser feito caso f seja derivável em relação em relação a x e y. Neste caso, obtém-se pela regra da cadeia que

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

OBS: No caso particular das EDO's autônomas, o método de Leibniz excluía os possíveis zeros da "mudança" $f(y)$. Com o método das isóclinas é possível perceber o papel estrutural que esses zeros possuem na representação da dinâmica gerada pela respectiva EDO autônoma. De fato, seja $y^{\#}$ um tal zero de $f(y)$, ou seja $f(y^{\#})=0$. Tem-se que a função constante; $y(x)=y^{\#}$ é uma solução inatingível pelo método de Leibniz! Essas soluções passaram a ser chamadas ***soluções de equilíbrio*** e os respectivos zeros passaram a ser chamados ***pontos de equilíbrio*** ou ***pontos críticos***. Dada uma EDO autônoma que possua um ponto crítico $y^{\#}$, tem-se que o

$$PVI: \begin{cases} y' = f(y), a < x < b \\ y(x_0) = y^{\#} \end{cases}$$

Possui como solução $y(x)=y^{\#}$.

Exercício: Fazer um estudo qualitativo das soluções da família de EDO's

$$y' = ay + by^2 \quad ,a,b \in \mathbb{R} \; .$$

Considerando as seguintes possibilidades;

(1) $ab > 0$.   (2) $ab < 0$.

1.9 Teorema de Existência e Unicidade para um PVI

Dado um PVI para uma EDO normal de 1ª ordem, existe um teorema conhecido como método das aproximações sucessivas ou método iterativo de **Picard**, que nos informa sobre a existência e unicidade da solução de um PVI mesmo que não sejamos capazes de obtê-la explicitamente.

Teorema de Existência e Unicidade: (Picard)

Dado o

$$PVI:\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se as seguintes hipóteses são satisfeitas

(H1) $f(x,y)$ é contínua no retângulo $R: |x-x_0| \le \alpha, |y-y_0| \le \beta$

(H2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ é contínua em R

Então definindo

$$M = \max_{(x,y)\in R}\{|f(x,y)|\} \quad \text{e} \quad \delta = \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$$

Tem-se que a sequência de funções

$$\varphi_n :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R} : x \mapsto \varphi_n(x)$$

obtidas através do seguinte processo iterativo

$$\varphi_{n+1}(x) = T\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_n(s))ds \quad ,\varphi_0 \equiv y_0$$

Converge uniformemente para uma função $\varphi(x)$ que é a ***única solução local*** do PVI.

Exemplo: Seja o

$$PVI:\begin{cases} y' = xy \quad ,x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Como $f(x,y) = xy$ satisfaz as hipóteses do **TEU** em qualquer vizinhança (retângulo) do ponto (0,1), então podemos aplicar o método recursivo de Picard para obtermos a seguinte sequência de funções;

$$\varphi_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x s\varphi_n(s)ds \quad ,\varphi_0 = 1$$

Tem-se que

$$\varphi_1(x) = T\varphi_0(x) = 1 + \int_0^x sds = 1 + \frac{x^2}{2}$$
$$\varphi_2(x) = T\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x s(1 + \frac{s^2}{2})ds = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4}$$
$$\varphi_3(x) = T\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x s(1 + \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{2.4})ds = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$$

De modo que,

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2.4} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

Logo,

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^n}{n!} = e^{x^2/2}$$

Portanto, a solução do PVI é dada por

$$y(x) = \varphi(x) = e^{x^2/2}, \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$

––––– ☻ –––––