INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

1. INTRODUÇÃO

Porque estudar as Equações Diferenciais Parciais? Simplesmente porque a maioria dos "fenômenos físicos" que ocorrem na natureza são descritos por equações diferenciais parciais, como por exemplo: a dinâmica dos fluidos, o eletromagnetismo, a deformação dos materiais elásticos, a difusão de neutrons, a difusão de calor, as vibrações em meios elásticos, a dinâmica populacional, a propagação de vírus, a dinâmica genética, modelos econômicos, a transmissão do estímulo nervoso através do axônio e, mais recentemente, as reações químicas que ocorrem na superfície do DNA. Isto para citar apenas alguns exemplos.

Exemplos:

$u_t = \alpha^2 u_{xx}$, (equação do calor unidimensional)

$u_t = \alpha^2 (u_{xx} + u_{yy})$, (equação do calor bidimensional)

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$, (equação da onda unidimensional)

$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u_t + \gamma^2 u$, (equação do telégrafo)

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$, (equação de Laplace tridimensional, teoria do potencial)

$u_{tt} = k^2 u_{xxxx}$, (equação da viga engastada)

$u_{tt} - (\alpha + \beta \int |u_x|^2 dx) u_{xx} = 0$, (equação de Pohozaev; vibrações transversais de uma viga)

$u_{tt} - u_{xx} + \operatorname{sen} u = 0$, (equação de Sine-Gordon; ótica não-linear)

$u_t = u_{xx} + e^{-E/u}(1-u)$, (equação da combustão)

$u_t + uu_x = \mu^2 u_{xx}$, (equação de Burger para o fluido compressível viscoso)

$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$, (equação de Korteweg-deVries para as ondas de água-rasa)

$u_t = (u^n u_x)_x; n \geq 1$, (equação da percolação)

$iu_t = -u_{xx}$, (equação de Shrödinger para o elétron livre)

Sistema de FitzHugh-Nagumo para o potencial de ação do neurônio:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u(1-u)(a-u) + v \\ v_t = bu - cv \end{cases}$$

Sistema de I. Segal para a interação entre dois campos escalares relativísticos

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + \gamma_1^2 v^2 u = 0 \\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + \gamma_2^2 u^2 v = 0 \end{cases}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}.$$

Definição: Uma equação diferencial parcial (EDP) de ordem *m* é uma igualdade envolvendo uma função de *n* variáveis ($n \geq 2$) e suas respectivas derivadas parciais de até ordem *m* (*m* ≥1), ou seja é uma igualdade do tipo

$$\boxed{F(x_1,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\ldots,\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}) = 0}$$

onde $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ e *F* é uma função qualquer.

OBS: Se *F* atuar linearmente na variável dependente e em suas derivadas então a EDP pode ser considerada como um operador linear atuando em algum espaço vetorial funcional.

Como resolver as EDP's? Esta é uma pergunta profunda, pois no caso das EDP's não lineares cada EDP exige uma técnica especial. De um modo geral, o método mais utilizado consiste em transformar a EDP em duas ou várias EDO's. As técnicas mais empregadas são as seguintes:

Separação de variáveis: esta técnica reduz uma EDP com *n* variáveis independentes à *n* EDO's.

Transformadas integrais: esta técnica reduz uma EDP com *n* variáveis a uma EDP com (*n-1*) varáveis.

Mudanças de coordenadas: esta técnica transforma a EDP em uma EDP mais simples ou mesmo em uma EDO, através de uma mudança das varáveis independentes.

Transformação da variável dependente: esta técnica transforma a variável dependente em uma outra na qual a EDP é mais fácil de se resolver.

Métodos numéricos: são métodos que reduzem uma EDP a um sistema de equações de diferenças que podem ser resolvidas através de técnicas recursivas via computador. Em muitos casos, esta é a única técnica. Além de discretização de uma EDP existem os que tentam aproximar as soluções por superfícies polinomiais (spline approximations).

Métodos perturbativos: esses métodos transformam uma EDP não-linear em uma seqüência de EDP's lineares que aproximam a equação original.

Técnicas impulso-resposta: esta técnica decompõe as condições iniciais e de fronteira do problema em impulsos simples e acha a resposta para cada impulso. A solução completa é obtida por adição das respostas parciais.

Equações integrais: esta técnica transforma a EDP em uma equação integral. As equações integrais possuem suas próprias técnicas de resolução.

Métodos variacionais: são métodos que reformulam o problema de obtenção da solução em um problema de minimização de certos funcionais, sendo a solução dada pela função minimizante.

Classificação das EDP's: a importância de se classificar as EDP's reside no fato de que cada classe possui suas próprias técnicas de resolução. As seis classificações básicas são as seguintes:

1ª) Ordem: a ordem de uma EDP é a ordem da derivada mais alta que nela aparece.

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \text{ , (segunda ordem)}$$

$$u_t + u u_x = 0 \text{, (primeira ordem)}$$

$$u_t = u_{xxx} + \cos u \text{, (terceira ordem)}$$

$$u_{tt} = k^2 u_{xxxx} \text{, (Quarta ordem)}$$

2ª)Número de variáveis independentes:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \text{, (2 variáveis independentes; } x \text{ e } t\text{)}$$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \text{, (3 variáveis independentes; } x, y \text{ e } t\text{)}$$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \text{, (4 variáveis independentes; } x, y, z \text{ e } t\text{)}$$

3ª)Homogeneidade: se na EDP não aparece uma função (apenas das variáveis independentes) isolada, a equação é dita homogênea. Caso contrário é não homogênea.

4ª)Coeficientes: uma EDP pode apresentar coeficientes constantes ou dependentes das variáveis de *F*.

$$u_{tt} + (\operatorname{sen} u)u_t + e^u u_{xx} = 0 \text{, (coeficientes variáveis)}$$

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \text{, (coeficientes variáveis)}$$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \text{, (coeficientes constantes)}$$

5ª)Linearidade: uma EDP é dita linear se atua linearmente sobre a variável dependente e suas derivadas . Usualmente se classificam apenas as EDP's lineares de segunda ordem. A forma geral de tal EDP é dada por

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = d(x)} \quad (*)$$

onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{\Omega} \subseteq \mathbf{R}^n$, e eventualmente pode se ter $x_n = t$ quando se tratar de fenômenos que evoluem no tempo. A ***parte principal*** de uma EDP é a parte da equação que contém os termos com derivadas de maior ordem. Por exemplo, a parte principal de (*) é dada por

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

Uma classificação mais geral, quanto a linearidade, para EDP's de 2ª ordem pode ser dada do seguinte modo: seja a EDP

$$F(x,u,u_i,u_{ij})=0\,,i,\,j=1,\ldots,n$$

onde $x=(x_1,\ldots,x_n),u_i=\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right\}_{i=1,\ldots,n},u_{i,j}=\left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=1,\ldots,n}$. Restringindo-se a subfamília dada por

$$Au+N(u)=0 \qquad (**)$$

onde $\boldsymbol{Au}=\sum a_{i,j}u_{i,j}$ é a parte principal. Neste caso, tem-se que

(**) é ***quase-linear*** se $a_{i,j}=a_{i,j}(x,u,u_i)$, $\boldsymbol{N}(u)=\boldsymbol{N}(x,u,u_i)$.

(**) é ***semi-linear*** se $a_{i,j}=a_{i,j}(x)\,\boldsymbol{,}\,\boldsymbol{N}(u)=\boldsymbol{N}(x,u,u_i)$.

(**) é ***linear*** se $a_{i,j}=a_{i,j}(x)\,\boldsymbol{,}\,\boldsymbol{N}(u)=b_i(x)u_i+c(x)u+d(x)$.

OBS: Quando não acontece nenhum dos casos acima diz-se que a EDP é não-linear.

Exemplos:

$u_t+uu_x-\mu u_{xx}=0$, (semi-linear)

$u_{tt}-u_{xx}+\operatorname{sen} u=0$, (semi-linear)

$u_{tt}-(\alpha+\beta\int|u_x|^2dx)u_{xx}=0$, (quase-linear)

$u_{tt}-(u_{xx})^2+e^u u=0$, (não-linear)

6ª) Arquétipos Fundamentais da Física-Matemática: essa classificação é originária da classificação das cônicas realizada na geometria analítica, por isso se aplica apenas as EDP's lineares de 2ª ordem com duas variáveis independentes, ou seja as equações do tipo

$$\boxed{Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{xy} + Du_x + Eu_y + Fu = G} \quad \text{(L)}$$

onde *A,B,C,D,E,F* e *G* são funções de das variáveis independentes $x_1 = x, x_2 = y$.

Definição: Uma EDP do tipo (L) é

(i) ***elíptica*** em (x_0, y_0) se $d(x_0, y_0) = B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) < 0$.

(ii) ***parabólica*** em (x_0, y_0) se $d(x_0, y_0) = 0$.

(iii) ***hiperbólica*** em (x_0, y_0) se $d(x_0, y_0) > 0$.

Aplicações:

(i) ***equações elípticas*** descrevem fenômenos em regime permanente (*steady-state*).

(ii) ***equações parabólicas*** descrevem fenômenos difusivos.

(iii) ***equações hiperbólicas*** descrevem fenômenos ondulatórios.

Exemplos: (arquétipos Canônicos)

$u_t = \alpha^2 u_{xx} \Rightarrow A = \alpha^2, B = C = 0 \Rightarrow d \equiv 0$, (parabólica)

$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Rightarrow A = c^2, B = 0, C = -1 \Rightarrow d \equiv 4c^2 > 0$, (hiperbólica)

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow A = C = 1, B = 0 \Rightarrow d \equiv -4 < 0$, (elíptica)

OBS: Em geral *d* pode depender das variáveis independentes, de modo que uma mesma EDP pode mudar de arquétipo em diferentes regiões do seu domínio. Por exemplo, a **equação de Tricomi** da dinâmica dos gases

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow d(x,y) = -4y \Rightarrow \begin{cases} elíptica\,,\, se\ y > 0 \\ parabólica, se\ y = 0 \\ hiperbólica, se\ y < 0 \end{cases}$$

Cada um dos três arquétipos fundamentais possui uma (ou duas) forma canônica que sempre pode ser obtida através de uma mudança das coordenadas. Os representantes canônicos são os seguintes

(i) Arquétipo elíptico

$$u_{xx} + u_{yy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y)$$

(ii) Arquétipo parabólico

$$u_{yy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y)$$

(iii) Arquétipo hiperbólico

$$\begin{gathered} u_{xx} - u_{yy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y) \\ ou \\ u_{xy} = \Psi(x, y, u, u_x, u_y) \end{gathered}$$

OBS: Onde Φ, Ψ são lineares em *u* e suas derivadas.

Dada a EDP

$$\boxed{Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G} \qquad (1)$$

com $B^2 - 4AC > 0$, o objetivo é achar uma mudança das variáveis independentes que reduza (1) a uma das duas formas canônicas. Para isso, tomamos uma mudança arbitrária

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{e} \quad \eta = \eta(x, y)$$

Vejamos quais condições ξ e η devem satisfazer para atender o objetivo acima. Utilizando a regra da cadeia, computemos as seguintes derivadas

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}
\end{aligned}$$

OBS: Usou-se o lema de Schwarz

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right).$$

Substituindo em (1), obtém-se que

$$\bar{A}u_{\xi\xi} + \bar{B}u_{\xi\eta} + \bar{C}u_{\eta\eta} + \bar{D}u_\xi + \bar{E}u_\eta + Fu = G$$

onde

$$\overline{A} = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$
$$\overline{B} = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y$$
$$\overline{C} = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$
$$\overline{D} = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y$$
$$\overline{E} = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y$$

então se $\overline{A} = \overline{C} = 0$, obteremos a forma canônica desejada. Para isso, tem-se que ter

$$A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$
$$A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

Podemos supor que ξ_y e $\eta_y \neq 0$ (ou que ξ_x e $\eta_x \neq 0$), pois queremos uma mudança com novas variáveis **funcionalmente independentes** (ou seja, $\partial(\xi,\eta)/\partial(x,y) \neq 0$), e obter que

$$A(\xi_x/\xi_y)^2 + B(\xi_x/\xi_y) + C = 0$$
$$A(\eta_x/\eta_y)^2 + B(\eta_x/\eta_y) + C = 0$$

de modo que

$$\xi_x/\xi_y = \frac{-B \pm \sqrt{d}}{2A} = \eta_x/\eta_y$$

onde $d = B^2 - 4AC$. Para que tenhamos duas novas variáveis **distintas** tomamos

$$\xi_x / \xi_y = \frac{-B+\sqrt{d}}{2A} \quad \text{e} \quad \eta_x / \eta_y = \frac{-B-\sqrt{d}}{2A}$$

ou

$$\xi_x / \xi_y = \frac{-B-\sqrt{d}}{2A} \quad \text{e} \quad \eta_x / \eta_y = \frac{-B+\sqrt{d}}{2A}$$

As equações acima são chamadas ***equações características***. Portanto, o problema se reduziu a acharmos duas funções $\xi(x,y)$ e $\eta(x,y)$ tais que as derivadas parciais satisfaçam as respectivas equações características. Para isso, olhamos para as curvas de nível dessas funções, isto é para as curvas (***curvas características***) dadas pelas equações

$$\xi(x,y) = Cte. \ , \quad \eta(x,y) = Cte.$$

As diferenciais totais dessas curvas atendem as equações

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0 \quad \text{e} \quad d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy = 0 \qquad (2)$$

o que implica em

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\eta_x}{\eta_y}$$

e integrando (2), obtém-se que

$$\xi(x,y) = \int \xi_x(x,y)dx + \int \xi_y(x,y)dy = Cte.$$
$$\eta(x,y) = \int \eta_x(x,y)dx + \int \eta_y(x,y)dy = Cte.$$

ou seja, a mudança de variáveis desejada é dada pelas próprias curvas características !

Exemplo: Reduzir a forma canônica a EDP

$$y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0.$$

Tem-se que

$$d = B^2 - 4AC = 4x^2y^2 > 0, \forall x, y \neq 0.$$

De modo que, a equação é hiperbólica exceto nos eixos coordenados onde se degenera. As curvas características são dadas por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{d}}{2A} = -\frac{x}{y} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{d}}{2A} = \frac{x}{y}$$

Lembre-se que essas equações são conseqüência de se impor $\overline{A} = \overline{C} = 0$. Integrando as duas EDO's acima, que são do tipo ***variáveis separadas***, obtém-se

$$y^2 + x^2 = C_1 \quad \text{e} \quad y^2 - x^2 = C_2.$$

De modo que, as novas variáveis independentes ξ, η são dadas por

$$\xi(x, y) = y^2 + x^2 \quad \text{e} \quad \eta(x, y) = y^2 - x^2.$$

Isto é, quando C_1, C_2 variam em $\mathbb{R}$ as curvas de nível de ξ e η descrevem hipérboles e círculos no plano. Com as novas variáveis obtemos que

$$\xi_x = 2x, \xi_y = 2y, \xi_{xx} = 2, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 2$$
$$\eta_x = -2x, \eta_y = 2y, \eta_{xx} = -2, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 2$$

logo

$$\overline{A} = 0$$
$$\overline{B} = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y = -16x^2y^2$$
$$\overline{C} = 0$$
$$\overline{D} = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y = 2(y^2 - x^2)$$
$$\overline{E} = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y = -2(y^2 + x^2)$$

Substituindo na EDP transformada

$$\overline{A}u_{\xi\xi} + \overline{B}u_{\xi\eta} + \overline{C}u_{\eta\eta} + \overline{D}u_{\xi} + \overline{E}u_{\eta} + Fu = G$$

obtém-se que

$$u_{\xi\eta} = \frac{-(y^2 - x^2)u_{\xi} + (x^2 + y^2)u_{\eta}}{8x^2y^2}$$

Finalmente, colocando x, y em função de ξ, η, obtém-se a seguinte forma canônica

$$u_{\xi\eta} = \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)}u_{\eta} - \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)}u_{\xi} \ .$$

Dada a EDP

$$\boxed{Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G} \qquad (1)$$

com $B^2 - 4AC = 0$. O objetivo é achar uma mudança das variáveis independentes que (1) a forma canônica do arquétipo parabólico. Para isso, procuramos uma mudança de coordenadas

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{e} \quad \eta = \eta(x, y)$$

tal que (1) nas novas coordenadas (ξ, η) seja da forma

$$\boxed{u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)}$$

De modo que, em

$$\bar{A}u_{\xi\xi} + \bar{B}u_{\xi u} + \bar{C}u_{\eta\eta} + \bar{D}u_\xi + \bar{E}u_\eta + Fu = G \qquad (2)$$

tenhamos $\bar{A} = \bar{B} = 0$. De $\bar{A} = 0$, obtém-se que

$$\xi_x / \xi_y = -B/2A$$

e portanto a equação característica é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}.$$

Integrando a equação acima se obtém a curva característica $\xi(x, y)$. Agora, como $B = \pm 2\sqrt{AC}$, então

$$\begin{aligned} \bar{B} &= 2A\xi_x\eta_x + 2\sqrt{AC}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\ &= 2\left[(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y)\right] \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = -\frac{B}{2A} = -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}$$

então $\overline{B}=0$. Logo, para tal ξ tem-se que $\overline{A}=\overline{B}=0$, independentemente de η, a qual pode ser tomada como sendo a própria variável *y*.

Exemplo: Reduzir à forma canônica a EDP

$$u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=0$$

Tem-se que $A=C=1, B=2$. Então, $B^2-4AC=0$, donde a EDP é parabólica.

1ª etapa: obtenção da equação característica. Tem-se que

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\xi_x}{\xi_y}=\frac{B}{2A}=1.$$

Integrando, obtém-se a mudança de coordenadas $\xi(x,y)$ que anula $\overline{A}$:

$$\xi(x,y)=\int dy-\int dx=y-x.$$

Para a mudança de coordenadas $\eta(x,y)$ tomamos

$$\eta(x,y)=y.$$

2ª etapa: obtenção da EDP nas novas variáveis. Tem-se que

$$\xi_x=-1, \xi_y=1, \xi_{xx}=\xi_{xy}=\xi_{yy}=0$$
$$\eta_x=0, \eta_y=1, \eta_{xx}=\eta_{xy}=\eta_{yy}=0$$

Substituindo obtém-se

$$\overline{A}=\overline{B}=0, \overline{C}=1, \overline{D}=\overline{E}=F=G=0.$$

Portanto, a forma canônica é dada por

$$u_{\eta\eta}=0.$$

Observe que esta equação pode ser resolvida facilmente, basta integrar duas vezes em relação à η. A primeira integração fornece

$$u_\eta(\xi,\eta)=f(\xi)$$

onde f é uma função arbitrária. A segunda integração nos leva a

$$u(\xi,\eta) = \eta f(\xi) + g(\xi)$$

onde g é uma função arbitrária. De modo que, voltando as variáveis iniciais obtém-se que

$$u(x,y) = yf(y-x) + g(y-x)$$

é solução da EDP para qualquer par de funções f e g duas vezes diferenciável. Portanto, existe uma infinidade (não enumerável) de soluções. Por exemplo,

$$u(x,y) = y\cosh(y-x) + e^{y-x}$$

é uma possível solução para a EDP.

1.3 Forma Canônica para a EDP Linear de 2ª Ordem do Tipo Elíptico:

Dada a EDP

$$\boxed{Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G} \quad (1)$$

com $B^2 - 4AC < 0$, queremos uma mudança de coordenadas

$$\xi = \xi(x,y) \quad \text{e} \quad \eta = \eta(x,y)$$

tal que (1) nas novas coordenadas seja da forma

$$\boxed{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)}$$

Para isso, é necessário que na equação transformada

$$\overline{A}u_{\xi\xi} + \overline{B}u_{\xi\eta} + \overline{C}u_{\eta\eta} + \overline{D}u_{\xi} + \overline{E}u_{\eta} + Fu = G \quad (2)$$

se tenha $\overline{A}, \overline{C} \neq 0$ e $\overline{B} = 0$. Neste caso, como se tem $d < 0$, não existiram curvas características reais. Por isso, teremos que realizar duas mudanças de coordenadas para obtermos a forma canônica desejada. Na primeira repetimos formalmente o que foi feito no caso hiperbólico obtendo com isso a "**forma hiperbólica complexa**" através de uma mudança de coordenadas complexa conjugada $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ que são dadas pelas raízes das equações características. Na Segunda mudança reduzimos a forma hiperbólica complexa obtida à forma canônica desejada através da mudança de coordenadas reais dada por

$$\xi = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \text{e} \qquad \eta = \frac{\alpha-\beta}{2i} \qquad (3)$$

Esse procedimento formal pode ser justificado sem dificuldades se as funções *A,B,C* puderem ser estendidas analiticamente à uma região do plano complexo contendo o domínio onde a EDP atua. Quando tal extensão não é possível a redução se torna muito complicada.

1ª mudança: redução à forma hiperbólica complexa

$$\boxed{u_{\alpha\beta} = \Psi(\alpha, \beta, u, u_{\alpha}, u_{\beta})}$$

Sejam $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ tais que

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_y} = \frac{-B+\sqrt{d}}{2A} \ , \ \frac{\beta_x}{\beta_y} = \frac{-B-\sqrt{d}}{2A}.$$

Resolvendo as equações características acima obtém-se as curvas características complexas que reduzem a EDP à forma hiperbólica complexa.

2ª mudança: redução à forma elíptica real

$$\boxed{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})}$$

Para isso obtemos a mudança definitiva $\xi = \xi(\alpha, \beta), \eta = \eta(\alpha, \beta)$, dada por (3), a qual reduzirá a forma hiperbólica complexa à forma elíptica real acima.

Exemplo: Reduzir à forma canônica a EDP

$$y^2 u_{xx} + x\, u_{yy} = 0.$$

Tem-se que $d = -4x^2 y^2 < 0, \forall x, y \neq 0$. De modo que, a EDP é do tipo elíptico.

1ª mudança: redução à forma hiperbólica complexa.

Equações características

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha_x}{\alpha_y} = -\frac{\sqrt{-4x^2y^2}}{2y^2} = -\frac{ix}{y} \Rightarrow \alpha(x,y) = \int y dy + i \int x dx$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta_x}{\beta_y} = -\frac{-\sqrt{-4x^2y^2}}{2y^2} = \frac{ix}{y} \Rightarrow \beta(x,y) = \int y dy - i \int x dx$$

Curvas características

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= y^2 + ix^2 \\ \beta(x,y) &= y^2 - ix^2 \end{aligned} \qquad (*)$$

logo,

$$\alpha_x = 2ix, \alpha_y = 2y, \alpha_{xx} = 2i, \alpha_{xy} = 0, \alpha_{yy} = 2$$
$$\beta_x = -2ix, \beta_y = 2y, \beta_{xx} = -2i, \beta_{xy} = 0, \beta_{yy} = 2$$

De modo que,

$$\begin{aligned} \overline{A} &= -4x^2y^2 + 4x^2y^2 = 0 \\ \overline{B} &= 8x^2y^2 + 8x^2y^2 = 16x^2y^2 \\ \overline{C} &= -4x^2y^2 + 4x^2y^2 = 0 \\ \overline{D} &= 2iy^2 + 2x^2 \\ \overline{E} &= -2iy^2 + 2x^2 \end{aligned}$$

OBS: De (*) obtém-se que

$$x^2 = \frac{\alpha-\beta}{2i} \quad \text{e} \quad y^2 = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Então,

$$\overline{A} = \overline{C} = 0, \overline{B} = \frac{4(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{i}, \overline{D} = 2i\beta, \overline{E} = -2i\alpha.$$

Substituindo em (2), obtém-se a forma hiperbólica complexa da EDP

$$\frac{4}{i}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)u_{\alpha\beta} + 2i\beta\ u_\alpha - 2i\alpha\ u_\beta = 0$$

ou seja

$$u_{\alpha\beta} = \frac{\beta}{2(\alpha^2-\beta^2)}u_\alpha - \frac{\alpha}{2(\alpha^2-\beta^2)}u_\beta$$

2ª mudança: forma elíptica real.

Curvas características

$$\xi(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{e} \quad \eta(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-\beta}{2i}.$$

Donde

$$\xi_\alpha = \frac{1}{2}, \xi_\beta = \frac{1}{2}, \xi_{\alpha\alpha} = \xi_{\alpha\beta} = \xi_{\beta\beta} = 0$$
$$\eta_\alpha = \frac{1}{2i}, \eta_\beta = -\frac{1}{2i}, \eta_{\alpha\alpha} = \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\beta} = 0$$

De modo que, a forma elíptica real será dada por

$$\overline{\overline{A}}u_{\xi\xi} + \overline{\overline{B}}u_{\xi\eta} + \overline{\overline{C}}u_{\eta\eta} + \overline{\overline{D}}u_\xi + \overline{\overline{E}}u_\eta + Fu = G \quad (4)$$

onde

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A}\xi_\alpha{}^2 + \bar{B}\xi_\alpha\xi_\beta + \bar{C}\xi_\beta{}^2$$
$$\bar{\bar{B}} = 2\bar{A}\xi_\alpha\eta_\alpha + \bar{B}(\xi_\alpha\eta_\beta + \xi_\beta\eta_\alpha) + 2\bar{C}\xi_\beta\eta_\beta$$
$$\bar{\bar{C}} = \bar{A}\eta_\alpha{}^2 + \bar{B}\eta_\alpha\eta_\beta + \bar{C}\eta_\beta{}^2$$
$$\bar{\bar{D}} = \bar{A}\xi_{\alpha\alpha} + \bar{B}\xi_{\alpha\beta} + \bar{C}\xi_{\beta\beta} + \bar{D}\xi_\alpha + \bar{E}\xi_\beta$$
$$\bar{\bar{E}} = \bar{A}\eta_{\alpha\alpha} + \bar{B}\eta_{\alpha\beta} + \bar{C}\eta_{\beta\beta} + \bar{D}\eta_\alpha + \bar{E}\eta_\beta$$

ou seja

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{C}} = \frac{1}{4}, \bar{\bar{B}} = 0, \bar{\bar{D}} = \frac{1}{4(\alpha+\beta)} = \frac{1}{8\xi}, \bar{\bar{E}} = \frac{-1}{4i(\alpha-\beta)} = \frac{1}{8\eta}$$

Substituindo em (4), obtém-se

$$\frac{1}{4}u_{\xi\xi} + \frac{1}{4}u_{\eta\eta} + \frac{1}{8\xi}u_\xi + \frac{1}{8\eta}u_\eta = 0$$

ou seja

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -\frac{1}{2\xi}u_\xi - \frac{1}{2\eta}u_\eta\,.$$